Feuille d'exercices n^{o}7 : Primitives

Exercice 1 [Calcul de primitives]

Donner sans calcul des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \frac{t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)$ se primitive en $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(1+t^2)$;
2. $t \mapsto 3t\sqrt{1+t^2} = \frac{3}{2}(2t)\sqrt{1+t^2}$ se primitive en $t \mapsto (1+t^2)^{3/2}$;
3. $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^2} = -\frac{-1/t}{\ln(t)^2}$ se primitive en $t \mapsto -\dfrac{1}{\ln(t)}$;
4. $t \mapsto \frac{t-1}{\sqrt{t(t-2)}} = \frac{1}{2}\frac{2t-2}{\sqrt{t^2-2t}}$ se primitive en $t \mapsto \sqrt{t(t-2)}$;
5. $t \mapsto te^{-4t^2} = -\frac{1}{8}(-8t)e^{-4t^2}$ se primitive en $t \mapsto -\dfrac{1}{8}e^{-4t^2}$;
6. $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)} = \frac{1/t}{\ln(t)}$ se primitive en $t \mapsto \ln\left(|\ln(t)|\right)$;
7. $t \mapsto \frac{1}{\tan(t)} = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ se primitive en $t \mapsto \ln\left(|\sin(t)|\right)$;
8. $t \mapsto \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}} = 2\frac{1}{2}\frac{1/\cos^2(t)}{\sqrt{\tan(t)}}$ se primitive en $t \mapsto 2\sqrt{\tan(t)}$;
9. $t \mapsto \frac{\sin(2t)}{3-\cos^2(t)} = \frac{-2(-\sin(t))\cos(t)}{3-\cos^2(t)}$ se primitive en $t \mapsto \ln(3-\cos^2(t))$;
10. $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^6} = \frac{1}{3}\frac{3t^2}{1+(t^3)^2}$ se primitive en $t \mapsto \dfrac{1}{3}\arctan(1+t^3)$;
11. $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^3} = -\frac{1}{2}(-2)\frac{1/t}{\ln(t)^3}$ se primitive en $t \mapsto -\dfrac{1}{2\ln(t)^2}$;
12. $t \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}^2(t)} = \frac{\mathrm{ch}^2(t)-\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{sh}^2(t)} = \frac{\mathrm{sh}'(t)\mathrm{ch}(t)-\mathrm{ch}'(t)\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{sh}^2(t)}$ se primitive en $t \mapsto -\dfrac{\mathrm{ch}(t)}{\mathrm{sh}(t)} = \dfrac{1}{\mathrm{th}(t)} = \coth(t)$.

Exercice 2 [Une fonction complexe]

On pose $\alpha = a + ib$:

$$\frac{1}{t-\alpha} = \frac{1}{(t-a)+ib} = \frac{t-a}{(t-a)^2+b^2} - i\frac{b}{(t-a)^2+b^2}$$

qui se primitive en $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln\left((t-a)^2+b^2\right) + i\arctan\left(\dfrac{x-a}{b}\right)$.

Exercice 3 [Linéarisation]

1. $t \mapsto \cos^2(t) = \dfrac{\cos(2t)+1}{2}$ se primitive en $t \mapsto \dfrac{\sin(2t)}{4} + \dfrac{t}{2}$;
2. $t \mapsto \sin^3(t) = -\dfrac{\sin(3t)}{4} + \dfrac{3\sin(t)}{4}$ se primitive en $t \mapsto \dfrac{\cos(3t)}{12} - \dfrac{3\cos(t)}{4}$;
3. $t \mapsto \sin(t)\cos(t) = \dfrac{\sin(2t)}{2}$ se primitive en $t \mapsto -\dfrac{\cos(2t)}{4}$;
4. $t \mapsto \sin(t)\cos^2(t) = \dfrac{\sin(3t)}{4} + \dfrac{\sin(t)}{4}$ se primitive en $t \mapsto -\dfrac{\cos(3t)}{12} - \dfrac{\cos(t)}{4}$.

Exercice 4 [Intégrales trigonométrique dépendant d'entiers]

$I(p,q) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(qt)\sin(pt)\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\cos((p-q)t) - \cos((p+q)t)\right)\mathrm{d}t = \dfrac{J(p-q)-J(p+q)}{2}$ où $J(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq 0 \\ 2\pi & \text{si} \quad n = 0 \end{cases}$

Et donc : $I_{p,q} = \begin{cases} \pi & \text{si } p = q \\ -\pi & \text{si } p = -q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 5 [Utilisation des complexes]

1. $t \mapsto \sin(t)e^{-t} = \mathrm{Im}\left(e^{(i-1)t}\right)$ se primitive en $t \mapsto \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{i-1}e^{(i-1)t}\right) = -\dfrac{\cos(t)+\sin(t)}{2}e^{-t}$;
2. $t \mapsto \cos^2(t)e^{2t} = \dfrac{e^{(2+2i)t}+2+e^{(2-2i)t}}{4}$ se primitive en $t \mapsto \dfrac{\cos(2t)+\sin(2t)+2}{8}e^{2t}$;
3. $t \mapsto t^2\cos(t)e^t = \dfrac{t^2e^{(1+i)t}+t^2e^{(1-i)t}}{2} = \mathrm{Re}\left(t^2e^{(1+i)t}\right)$ qu'on primitive avec deux ipp pour diminuer la puissance en t : $t \mapsto \mathrm{Re}\left(\left(\dfrac{t^2}{1+i} - \dfrac{2t}{(1+i)^2} + \dfrac{2}{(1+i)^3}\right)e^{(1+i)t}\right) = \dfrac{(t^2-1)\cos(t)+(t^2-2t+1)\sin(t)}{2}e^t$

Exercice 6 [Inégalité de Cauchy–Schwarz]

On considère f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

1. On développe le carré et on utilise la linéarité de l'intégrale :

   $P : x \mapsto \int_a^b (f(t)+xg(t))^2\mathrm{d}t = \underbrace{\left(\int_a^b (g(t))^2\mathrm{d}t\right)}_{=a} \cdot x^2 + \underbrace{\left(2\int_a^b f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t\right)}_{=b} \cdot x + \underbrace{\left(\int_a^b (f(t))^2\mathrm{d}t\right)}_{=c}.$

   $\Delta = b^2 - 4ac = 4\left(\int_a^b f(t)\cdot g(t)\mathrm{d}t\right)^2 - 4\left(\int_a^b (g(t))^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b (f(t))^2\mathrm{d}t\right)$
2. Par positivité sous l'intégrale : $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$ donc $\Delta \leqslant 0$

   Cas d'égalité : $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall t \in [a,b],\ f(t)+xg(t) = 0$ ie f, g sont proportionnelles.

Exercice 7 [Intégrale et valeur absolue]

Pour tout $t \in [a,b]$: $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ puis on intègre l'inégalité sur $[a,b]$.

Cas d'égalité : f de signe constant (intégrale nulle d'une fonction continue de signe contant)

Exercice 8 [Intégrales polynomiale dépendant d'entiers]

Par ipp :

$I(p,q) = \dfrac{q}{p+1}I(p+1,q-1) = \dfrac{q}{p+1}\dfrac{q-1}{p+2}I(p+2,q-2) = \cdots = \dfrac{q(q-1)(q-2)\ldots 1}{(p+1)(p+2)\ldots(p+q)}I(p+q,0) = \dfrac{1}{\binom{p+q}{p}}I(p+q,0) = \dfrac{1}{\binom{p+q}{p}}\dfrac{1}{p+q+1}.$

Exercice 9 [Changements de variable 1]

1. $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{u+1}\mathrm{d}u = 1 - \ln(3/2)$;
2. $\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u = \dfrac{\ln(3)}{2}$;
3. $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_e^{1/e} \frac{-\ln(1/u)}{u^2+1}\mathrm{d}u = -\int_{1/e}^{e} \frac{\ln(u)}{u^2+1}\mathrm{d}u$ donc $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t = 0$;
4. $\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2u}{u^2+u+1}\mathrm{d}u = \ln(3) - \dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

Exercice 10 [Changements de variable 2]

1. $\int^x \frac{1}{1-\sqrt{t+2}}\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{x+2}} \dfrac{2u}{1-u}\mathrm{d}u = -2\sqrt{x+2} - 2\ln|\sqrt{x+2}-1|$
2. $\int^x \frac{1}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = \int^{\mathrm{Arcsin}(x)} \frac{\mathrm{d}u}{\cos^2(u)} = \tan(\mathrm{Arcsin}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
3. $\int^t \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\mathrm{d}t = \int^{\sqrt{x}} \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = 2\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})$;
4. $\int^x \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\mathrm{d}t = -2\int^{\mathrm{Arccos}(x)} \cos^2(u/2)\mathrm{d}u = -\int^{\mathrm{Arccos}(x)}(1+\cos(u))\mathrm{d}u = -\mathrm{Arccos}(x) - \sin\left(\mathrm{Arccos}(x)\right) = -\mathrm{Arccos}(x) - \sqrt{1-x^2}$.

Exercice 11 [Règles de Bioche]

1. $u = \cos(t)$: $\int^x \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t = -\int^{\cos(x)} \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = -\ln(1+\cos(x))$;
2. $u = \sin(t)$: $\int^x \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)-\cos^2(t)}\mathrm{d}t = \int^{\sin(x)} \dfrac{\mathrm{d}u}{2u^2-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\dfrac{\sin(x)-\sqrt{2}/2}{\sin(x)+\sqrt{2}/2}\right|$;
3. $u = \sin(t)$: $\int^x \frac{3-2\sin(t)}{\cos(t)+3\tan(t)}\mathrm{d}t = \int^{\sin(x)} \dfrac{2u-3}{u^2-3u-1}\mathrm{d}u = \ln\left|\sin^2(x) - 3\sin(x) - 1\right|$;
4. $u = \cos(t)$: $\int^x \cos^2(t)\sin^3(t)\mathrm{d}t = \int^{\cos(\mathrm{x})} -u^2(1-u^2)\mathrm{d}u = \dfrac{\cos^5(x)}{5} - \dfrac{\cos^3(x)}{3}$.

Exercice 12 [Intégration par parties 1]

1. on dérive le polynôme : $\int_1^2 (t^2-t+1)e^{-t}\mathrm{d}t = 4e^{-1} - 8e^{-2}$;
2. on dérive le ln : $\int_1^e t(\ln(t))^2\mathrm{d}t = \dfrac{e^2-1}{4}$;
3. on dérive le Arctan : $\int_0^{\sqrt{3}} t^2\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{3} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\ln(2)}{3}$;
4. on dérive le ln (et on primitive le “$\times 1$”) : $\int_{-1}^1 \ln(t^2+a)\mathrm{d}t = 2\ln(1+a) - 4 + 4\sqrt{a}\mathrm{Arctan}(1/\sqrt{a}) = 2\ln(1+a) - 4 + 2\pi\sqrt{a} - 4\sqrt{a}\mathrm{Arctan}(\sqrt{a})$;
5. on dérive la racine (et on primitive le “$\times 1$”) : $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{2} - \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t + \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}$ puis : $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t = \dfrac{5\pi}{24} + \dfrac{\sqrt{3}}{8} + \dfrac{1}{4}$;
6. on fait deux ipp en dérivant le sin (puis le cos qui apparaît) : $\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t)\mathrm{d}t = \dfrac{3}{4}\left(e^{-2\pi/3} - e^{2\pi}\right) - \dfrac{9}{4}\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t)\mathrm{d}t$ puis $\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t)\mathrm{d}t = \dfrac{3}{13}\left(e^{-2\pi/3} - e^{2\pi}\right)$.

Exercice 13 [Intégration par parties 2]

1. $t\sin^3(t) = -\dfrac{t}{4}\sin(3t) + \dfrac{3t}{4}\sin(t) = \mathrm{Im}\left(-\dfrac{1}{4}te^{3it} + \dfrac{3}{4}te^{it}\right)$ qu'on primitive par ipp en dérivant le t : $t \mapsto -\dfrac{3t}{4}\cos(t) + \dfrac{3}{4}\sin(t) + \dfrac{t}{12}\cos(3t) - \dfrac{1}{36}\sin(3t)$;
2. on dérive Arcsin et on primitive le “$\times 1$” : $t \mapsto t\mathrm{Arcsin}(t) + \sqrt{1-t^2}$;
3. on dérive le t : $\int^x t\mathrm{sh}(t)\mathrm{d}t = x\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)$;
4. on dérive le ln : $\int^x \frac{\ln(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t = \ln(x)\ln(\ln(x)) - \ln(x)$.

Exercice 14 [Primitive périodique de fonction périodique]

Toutes les primitives diffèrent d'une constante ce qui assure $(i) \Leftrightarrow (ii)$.

Si toutes les primitives sont T-périodiques : soit F une telle primitive, alors :

$$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = F(T) - F(0) = 0$$

Réciproquement si $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$, considérons F une primitive de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^T f(t)\mathrm{d}t + \int_T^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_x^T f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$$

donc F est T-périodique.

Exercice 15 [Primitives et parité]

1. Soit F primitive de f. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$F(x) - F(-x) = \int_{-x}^x f(t)\mathrm{d}t = 0 \text{ (cours).}$$

   donc F est paire.
2. Une fonction impaire s'annule en 0, donc s'il y a une primitive impaire, c'est $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ (l'unique primitive qui s'annule en 0).

   Soit $x \in \mathbb{R}$: $F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(-u)\mathrm{d}u = 0$. Donc F est impaire.

Exercice 16 [Fonction à partir d'une intégrale 1]

Changement de variable : $f(x) = \int_{-x}^{1-x} e^{|u|}\sin|u|\mathrm{d}u = F(1-x) - F(-x)$ où F primitive de $t \mapsto e^{|t|}\sin|t|$

f dérivable comme composée avec :

$$\forall x \in [0;1] \text{ (ou } \mathbb{R}),\ f'(x) = -F'(1-x)+F'(-x) = -e^{|1-x|}\sin|1-x|+e^{|-x|}\sin|-x| = e^{-x}\sin(x)-e^{1-x}\sin(1-x).$$

Exercice 17 [Fonction à partir d'une intégrale 2] $t \mapsto e^t/t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[x, x^2]$ (si $x \in [1;+\infty[$) ou sur $[x^2;x]$ (si $x \in]0;1]$) donc f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si F primitive de $t \mapsto e^t/t$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = F(x^2) - F(x)$$

donc f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (comme composée) avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2x\frac{e^{x^2}}{x^2} - \frac{e^x}{x} = \frac{2e^{x^2} - e^x}{x}$$

D'où : $f'(x) > \ \Leftrightarrow x^2 + \ln(2) > x$ (toujours vrai) donc f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

limites :

— en 0 : encadrement : $e^{x^2}\ln(x) \geqslant f(x) \geqslant e^x\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;

— en $+\infty$: encadrement : $e^x\ln(x) \leqslant f(x) \leqslant e^{x^2}\ln(x)$ donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Donc f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18 [Fonction à partir d'une intégrale 3]

Soient F, G primitives de $t \mapsto \text{Arcsin}(\sqrt{t})$ et $t \mapsto \text{Arccos}(\sqrt{t})$ sur $[0;1]$. Alors f est bien définie sur $\mathbb{R}$ (composée) avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = F(\sin^2(x)) - F(0) + G(\cos^2(x)) - G(0).$$

Par composée f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\cos(x)\sin(x)\text{Arcsin}(|\sin(x)|) - 2\sin(x)\cos(x)\text{Arccos}(|\cos(x)|)$$

Comme f est clairement π-périodique et paire, il suffit de l'étudier sur $[0;\pi/2]$. Pour $x \in [0;\pi/2]$:

$$\sin(x), \cos(x) \in [0;1] \text{ puis } \text{Arcsin}(|\sin(x)|) = x = \text{Arcsin}(|\cos(x)|)$$

d'où $f'(x) = 0$ sur $[0;\pi/2]$ puis sur $\mathbb{R}$, donc f est constante.

En $x = \pi/4$:

$$f(x) = \int_0^{1/2} \text{Arcsin}(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{1/2} \text{Arccos}(\sqrt{t})\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} \underbrace{\left(\text{Arcsin}(\sqrt{t}) + \text{Arccos}(\sqrt{t})\right)}_{=\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$