Feuille d'exercices n^{o}7 : Primitives

Exercice 1 [Calcul de primitives]
Donner sans calcul des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \frac{t}{1+t^2}$;
2. $t \mapsto 3t\sqrt{1+t^2}$;
3. $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^2}$;
4. $t \mapsto \frac{t-1}{\sqrt{t(t-2)}}$;
5. $t \mapsto te^{-4t^2}$;
6. $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)}$;
7. $t \mapsto \frac{1}{\tan(t)}$;
8. $t \mapsto \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$;
9. $t \mapsto \frac{\sin(2t)}{3-\cos^2(t)}$;
10. $t \mapsto \frac{t^2}{1+t^6}$;
11. $t \mapsto \frac{1}{t\ln(t)^3}$;
12. $t \mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}^2(t)}$.

Exercice 2 [Une fonction complexe]
Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, déterminer une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-\alpha}$.

Exercice 3 [Linéarisation]
À l'aide d'une linéarisation, calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \cos^2(t)$;
2. $t \mapsto \sin^3(t)$;
3. $t \mapsto \sin(t)\cos(t)$;
4. $t \mapsto \sin(t)\cos^2(t)$.

Exercice 4 [Intégrales trigonométrique dépendant d'entiers]
Calculer, pour $p, q \in \mathbb{Z}$: $I(p,q) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(qt)\sin(pt)\mathrm{d}t$.

Exercice 5 [Utilisation des complexes]
À l'aide de calculs dans les complexes, déterminer des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \sin(t)e^{-t}$;
2. $t \mapsto \cos^2(t)e^{2t}$;
3. $t \mapsto t^2\cos(t)e^t$.

Exercice 6 [Inégalité de Cauchy–Schwarz]
On considère f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

1. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $P : x \mapsto \int_a^b (f(t)+xg(t))^2\mathrm{d}t$. Montrer que P est une fonction polynomiale de degré 2, et calculer son discriminant.
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\left(\int_a^b (f(t)\cdot g(t))\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t\right)\cdot\left(\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t\right).$$

Exercice 7 [Intégrale et valeur absolue]
Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 8 [Intégrales polynomiale dépendant d'entiers]
Calculer, pour $p, q \in \mathbb{N}$: $I(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\mathrm{d}t$ (on pourra faire des intégrations par parties pour se ramener à calculer $I(p+q,0)$).

Exercice 9 [Changements de variable 1]
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable suggéré :

1. $\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t$ avec $u = e^t$;
2. $\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(t)}\mathrm{d}t$ avec $u = \sin(t)$;
3. $\int_{1/e}^{e} \frac{\ln(t)}{t^2+1}\mathrm{d}t$ avec $u = 1/t$;
4. $\int_1^2 \frac{1}{t+\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t-1}$.

Exercice 10 [Changements de variable 2]

Calculer les primitives des fonctions suivantes à l'aide du changement de variable suggéré :

1. $t \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{t+2}}$ avec $u = \sqrt{t+2}$;
2. $t \mapsto \frac{1}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$ avec $u = \mathrm{Arcsin}(t)$;
3. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ avec $u = \sqrt{t}$;
4. $t \mapsto \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ avec $u = \mathrm{Arccos}(x)$.

Exercice 11 [Règles de Bioche]

À l'aide des règles de Bioche, calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{1+\cos(t)}$;
2. $t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)-\cos^2(t)}$;
3. $t \mapsto \frac{3-2\sin(t)}{\cos(t)+3\tan(t)}$;
4. $t \mapsto \cos^2(t)\sin^2(t)$.

Exercice 12 [Intégration par parties 1]

À l'aide d'intégrations par parties, calculer les intégrales suivantes :

1. $\int_1^2 (t^2-t+1)e^{-t}\mathrm{d}t$;
2. $\int_1^e t(\ln(t))^2\mathrm{d}t$;
3. $\int_0^{\sqrt{3}} t^2\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t$;
4. $\int_{-1}^1 \ln(t^2+a)\mathrm{d}t$ (pour $a > 0$) ;
5. $\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/2} \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$;
6. $\int_{-\pi}^{\pi/3} e^{-2t}\sin(3t)\mathrm{d}t$.

Exercice 13 [Intégration par parties 2]

À l'aide d'intégrations par parties, calculer des primitives des fonctions suivantes :

1. $t \mapsto t\sin^3(t)$;
2. $t \mapsto \mathrm{Arcsin}(t)$;
3. $t \mapsto t\mathrm{sh}(t)$;
4. $t \mapsto \frac{\ln(\ln(t))}{t}$.

Exercice 14 [Primitive périodique de fonction périodique]

Soit $T > 0$. On considère f fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique. Montrer l'équivalence entre :
(i) une primitive de f est T-périodique ;
(ii) toutes les primitives de f sont T-périodiques ;
(iii) f est de valeur moyenne nulle, c'est-à-dire : $\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 15 [Primitives et parité]

Soit f continue sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est impaire : montrer que toutes les primitives de f sont paires.
2. On suppose que f est paire : montrer que f possède une unique primitive impaire, et la caractériser.

Exercice 16 [Fonction à partir d'une intégrale 1]

Montrons que la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \int_0^1 e^{|t-x|}\sin|t-x|\mathrm{d}t$ est dérivable sur $[0,1]$ et calculer sa dérivée.

Exercice 17 [Fonction à partir d'une intégrale 2]

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t$. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 18 [Fonction à partir d'une intégrale 3]

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})\mathrm{d}t + \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\mathrm{d}t$ est constante, et donner sa valeur.