Feuille d'exercices n^{o}6 : Les complexes

Exercice 1 [Formes algébriques]

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

1. $(3+2i)(1-i)$;
2. $(1-i)^3$;
3. $\frac{1}{2-i\sqrt{3}}$;
4. $\frac{4+3i}{-2+7i}$;
5. $\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$;
6. $\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2$.

Exercice 2 [Formes exponentielles]

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle, où $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

1. $1+e^{i\theta}$;
2. $1-e^{i\theta}$;
3. $\dfrac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}$;
4. $e^{i\theta}+e^{i\theta'}$;
5. $1-i\tan(\theta)$.

Exercice 3 [Inégalité de Ptolémée]

1. Soient $x, y, z \in \mathbb{C}$, montrer que : $|x| \cdot |y-z| \leqslant |y| \cdot |z-x| + |z| \cdot |x-y|$.
2. En déduire que, pour $x, y, z, t \in \mathbb{C}$, on a :

$$|x-y| \cdot |z-t| \leqslant |x-z| \cdot |y-t| + |x-t| \cdot |y-z|.$$

Exercice 4 [Un calcul de dérivées]

Linéariser $\sin^3(x)$ et en déduire les dérivées successives de la fonction $x \mapsto \sin^3(x)$.

Exercice 5 [Système d'équation trigonométrique]

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\left\{\begin{array}{rcl} 1+\cos x+\cos y & = & 0 \\ \sin x+\sin y & = & 0 \end{array}\right.$;
2. $\left\{\begin{array}{rcl} \cos a+\cos x+\cos y & = & 0 \\ \sin a+\sin x+\sin y & = & 0 \end{array}\right.$ (où $a \in \mathbb{R}$).

En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que trois complexes x, y, z de module 1 tels que $x+y+z=0$ vérifient $x^n+y^n+z^n=0$

Exercice 6 [Puissances des racines de l'unité]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ les racines n-èmes de l'unité. Calculer, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, la quantité : $S_p = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^p$ (on pourra distinguer selon que p est ou non un multiple de n).

Exercice 7 [Deux sommes classiques]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer : $C_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$.

Exercice 8 [Deux sommes trigonométriques]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta+\frac{2k\pi}{n}\right) = 0$.

Exercice 9 [Autres sommes trigonométriques]

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

1. $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$;
2. $\sum_{k=0}^{n} \sin^2(k\theta)$;
3. $\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta)$.

Exercice 10 [Demi-plan supérieur et disque unité]

On note $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$. Et on définit l'application f sur $\mathbb{C} \setminus \{-i\}$ par : $f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de P sur D.
2. Que dire de la restriction de f à $\mathbb{R}$?

Exercice 11 [Homographies]

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $ad - bc = 1$. On considère la fonction $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$.

1. Vérifier que h est bien définie sur $P = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 0\}$.
2. Montrer que, pour tout $z \in P$, on a : $\operatorname{Im} h(z) = \dfrac{\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2}$.
3. En déduire que h est une bijection de P sur P.

Exercice 12 [Complexes de module 1 et réels]

Soient z, u de complexes de module 1 tels que $zu \neq -1$. Montrer que $\dfrac{z+u}{1+zu}$ est un réel, et le calculer à l'aide de α et β, arguments respectifs de z et u.

Réciproquement, soient z, u des complexes avec $z \notin \mathbb{R}$ de module 1 et $zu \neq -1$. Montrer que, si $\dfrac{z+u}{1+zu}$ est réel, alors $|u| = 1$.

Exercice 13 [Un polynôme de degré 4]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(3z^2 + z + 1)^2 + (z^2 + 2z + 2)^2 = 0$.

Exercice 14 [Une équation polynomiale de degré n]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $1 + 2z + 2z^2 + \cdots + 2z^{n-1} + z^n = 0$.

Exercice 15 [Systèmes somme–produit]

Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}$:

1. $\begin{cases} x+y=4 \\ xy=5 \end{cases}$;
2. $\begin{cases} x+y=3-i \\ xy=4-3i \end{cases}$;
3. $\begin{cases} x+y=2\cos(\theta) \\ xy=1 \end{cases}$ $(\theta \in \mathbb{R})$;
4. $\begin{cases} x+y &= 7 \\ \ln x + \ln y &= 1 \end{cases}$;
5. $\begin{cases} e^x e^{2y} &= a \\ 2xy &= 1 \end{cases}$.

Exercice 16 [Identité du parallélogramme]

Montrer l'identité du parallélogramme : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs de ses côtés.

Exercice 17 [Un parallélogramme ?]

Montrer que, pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a : $|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$, et étudier le cas d'égalité.

Comment interpréter géométriquement ce résultat ?

Exercice 18 [Équations géométriques]

Déterminer les points du plan d'affixe z tels que :

1. 1, z et z^2 sont alignés ;
2. 1, z et z^2 sont les sommets d'un triangle rectangle (en précisant le point en lequel il est rectangle) ;
3. z, z^2 et z^4 sont alignés ;
4. 1, z et z^2 sont les sommets d'un triangle équilatéral (en précisant s'il est direct ou non)