Feuille d'exercices n^{o}5 : Les fonctions usuelles

Exercice 1 [Équations autours des logarithmes et puissances]

1. $X = 2^x$: $2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+3} + 4 = 0 \Leftrightarrow 2X^3 - X^2 - 8X + 4 = 0 \Leftrightarrow (X-2)(2X^2+3X-2) = 0 \Leftrightarrow X \in \{-2, 1/2, 2\} \Leftrightarrow x = \pm 1$;
2. $X = \ln(x) \neq 0 : \ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow X - \dfrac{1}{X} = \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow X^2 - \dfrac{3}{2}X - 1 = 0 \Leftrightarrow X = -1/2$ ou $2 \Leftrightarrow x = e^2$ ou $e^{-1/2}$;
3. $2^{x^2} = 3^{x^3} \Leftrightarrow x^2\ln(2) = x^3\ln(3) \Leftrightarrow x = 0$ ou $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$;
4. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x+4} - 2^{x+2} = 3^{x+2} - 3^x \Leftrightarrow 2^x \cdot 12 = 3^x \cdot 8 \Leftrightarrow (2/3)^x = (2/3) \Leftrightarrow x = 1$;
5. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \dfrac{1}{2}x\ln(x) \Leftrightarrow \ln(x) = 0$ ou $\sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1$ ou 4 ;
6. $2^x + 3^x = 5$: la fonction $x \mapsto 2^x + 3^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 1 est solution, donc c'est l'unique solution ;
7. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$: la fonction $x \mapsto \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et 1 est solution, donc c'est l'unique solution ; autre méthode : $X = \sqrt[6]{x}$ donne : $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2 \Leftrightarrow X^3 + X^2 = 2 \Leftrightarrow (X-1)(X^2 + 2X + 2) = 0 \Leftrightarrow X = 1$ (car second facteur sans racine dans $\mathbb{R}_+$) ;
8. par définition : $\pi^{\sin^2(x)} \in [1; +\infty[$ et $\cos(\pi x) \in [-1; 1]$ donc $\pi^{\sin^2(x)} = \cos(\pi x) \Leftrightarrow \pi^{\sin^2(x)} = \cos(\pi x) = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$ et $\cos(\pi x) = 1 \Leftrightarrow x \in \pi\mathbb{Z}$ et $x \in 2\mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 0$ (car π est irrationnel).

Exercice 2 [Système et étude de fonction]

$\varphi : x \mapsto x + a + \frac{1}{ax}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x) = 1 - \frac{1}{ax^2} = \frac{ax^2 - 1}{ax^2}$$

x	0		$1/\sqrt{a}$		$+\infty$
φ'	||	$-$	0	$+$	
φ	|| $+\infty$	$\searrow$	$a + \frac{2}{\sqrt{a}}$	$\nearrow$	$+\infty$

Et par étude de fonction $a + \dfrac{2}{\sqrt{a}} \geqslant 3$ sur $\mathbb{R}_+^*$, avec égalité ssi $a = 1$.

(ou en notant : $a + \dfrac{2}{\sqrt{a}} - 3 = \dfrac{\sqrt{a}^3 - 3\sqrt{a} + 2}{\sqrt{a}} = \dfrac{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+2)}{\sqrt{a}} \geqslant 0$ ne s'annulant qu'en $\sqrt{a} = 1$ ie $a = 1$).

Une solution est de la forme $(x, y, z) = (x, y, -x-y)$, et donc $(e^x, e^y, e^z) = (X, a, 1/ax)$: l'unique solution est pour $X = a = 1$ qui donne $x = y = z = 0$.

Exercice 3 [Une inégalité]

$x^x(1-x)^{1-x}\exp\left(x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)\right) = \exp(f(x))$ avec $f'(x) = \ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{1-x} - 1\right)$.

$f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{1-x} \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant 1/2$

x	0		$1/2$		1
f'	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
f		$\searrow$	$-\ln(2)$	$\nearrow$	

Et la quantité $x^x(1-x)^{1-x}$ est donc minimale pour $x = 1/2$, et vaut $\exp(-\ln(2)) = 1/2$.

Exercice 4 [Utilisation d'une inégalité classique]
Inégalité prouvée dans le cours.

On a : $\ln(1+1/n) \leqslant 1/n$ donc $n\ln(1+1/n) \leqslant 1$ puis $(1+1/n)^n = \exp(n\ln(1+1/n)) \leqslant e^1 = e$
De même : $\ln(1-1/n) \leqslant -1/n$ puis $-n\ln(1-1/n) \geqslant 1$ puis $(1-1/n)^{-n} = \exp(-n\ln(1-1/n)) \geqslant e^1 = e$.

Exercice 5 [Limites et croissances comparées]

1. $x^2\sqrt{|\ln(x)|} = \sqrt{x^4|\ln(x)|} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$;
2. $x^{(x^x)} = \exp(x^x\ln(x)) \underset{x\to 0^+}{\to} 0$;
3. $(x^x)^x = \exp(x\ln(x^x)) \underset{x\to 0^+}{\to} 1$;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim\limits_{y\to+\infty} (y)^{\frac{1}{y}} = \lim\limits_{y\to+\infty} \exp\left(\dfrac{\ln y}{y}\right) = 1$;
5. $x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}} = \exp\left(\dfrac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln\left(\frac{x}{e^x-1}\right) + \ln(e^x-1)}{\ln(e^x-1)}\right) \underset{x\to 0^+}{\to} e^1$;
6. $\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\to} e^2$;
7. $[\ln(1+x)]^x = \exp\left(x\ln\left(\ln\left(1+x\right)\right)\right) = \exp\left(\dfrac{x}{\ln(1+x)}\ln(1+x)\ln\left(\ln\left(1+x\right)\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\to} 1$;
8. $\left[\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \dfrac{x}{2}\right] = \dfrac{x(1-e^{1/x})}{2(1+e^{1/x})} = -\dfrac{\frac{e^{1/x}-1}{1/x}}{2(1+e^{1/x})} \underset{x\to+\infty}{\to} -\dfrac{1}{4}$;
9. $\left[\dfrac{\ln x}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)}{x}\right) = \exp\left(\dfrac{\ln(\ln(x))}{x} - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1$;
10. $\left[\dfrac{x^{(x^x)}\ln x}{x^x-1}\right]^x = \exp\left(x\ln(x^{(x^x)}) + x\ln|\ln(x)| - x\ln|x^x-1|\right)$
$= \exp\left(x^x \cdot x\ln(x) + x\ln(x)\cdot\dfrac{\ln|\ln(x)|}{\ln(x)} - \dfrac{x\ln(x)}{e^{x\ln(x)}-1}\cdot\dfrac{1}{\ln(x)}\cdot(x^x-1)\ln|x^x-1|\right) \underset{x\to 0^+}{\to} 1.$

Exercice 6 [Étude de fonctions]

$D_f =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.
On réécrit $f(x)$ sous forme exponentielle : $f(x) = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \exp(g(x))$ avec $g(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ avec :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$$

donc pour étudier les variations de f, il suffit d'étudier le signe de g'. On a pour $x \in \mathcal{D}_f$:

$$g'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + x\cdot\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x}.$$

Pour avoir le signe de g', on dérive encore :

$$g''(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x(1+x)-(1+x)^2+x}{x(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2}$$

donc g'' est du signe de $-x$. On déduit donc que :
- g' est croissante sur $]-\infty;-1[$: comme de plus $\lim\limits_{x\to-\infty} g'(x) = 0$ (par calcul direct), on déduit que g' est positive sur $]-\infty;-1[$, donc f est croissante sur $]-\infty;-1[$;
- g' est décroissante sur $]0;+\infty[$: comme de plus $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x) = 0$ (à nouveau par calcul direct), on déduit que g' est positive sur $]0;+\infty[$, donc f est croissante sur $]0;+\infty[$.

Dans les deux cas, on trouve les monotonies voulues.

Autre méthode : (un peu plus jolie)

On sait que, pour tout $X > -1$, on a : $\ln(1+X) \leqslant X$ avec égalité ssi $X = 0$.

Appliquons cette inégalité avec $X = \dfrac{x}{x+1} - 1$ qui vérifie bien $X > -1$ pour $x \in D_f$ (comme alors $\dfrac{x}{x+1} > 0$). Et on a : $X = 0 \Leftrightarrow x = x+1$ ce qui est impossible. On a donc pour tout $x \in \mathcal{D}_f$: $\ln(1+X) < X$ (le cas d'égalité étant exclu).

Donc : $\dfrac{x}{x+1} - 1 - \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) > 0$.

Donc : $-\dfrac{1}{x+1} + \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) = -\dfrac{1}{x+1} + \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) > 0$.

Ce qui donne bien $g'(x) > 0$ pour tout $x \in D_f$.

Pour les limites :
- en $\pm\infty$: par limite classique : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = e$
- en -1 : calcul direct : $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = +\infty$
- en 0 : croissances comparées : $\lim\limits_{x\to-0} f(x) = 1$ donc prolongeable par continuité en 0 ; prolongement non dérivable en 0 (tangente verticale) par croissances comparées et limites classiques.

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'		$+$				$+$	
f	e	$\nearrow$	$+\infty$		1	$\nearrow$	e

Exercice 7 [Équations trigonométriques]

1. $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin 9x + \sin 5x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\cos(2x)\sin(7x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(2x) = 0$ ou $\sin(7x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi/4[\pi/2]$ ou $\pi/42[2\pi/7]$ ou $5\pi/42[2\pi/7]$;

2. $\sin 2x + \sin 6x = \sin 4x \Leftrightarrow 2\cos(2x)\sin(4x) = \sin(4x) \Leftrightarrow \sin(4x) = 0$ ou $\cos(2x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0[\pi/4]$ ou $\pm \pi/6[\pi]$;
3. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 2\cos(3x)\cos(2x) + \cos(3x) = 0 \Leftrightarrow \cos(3x) = 0$ ou $\cos(2x) = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pi/6[\pi/3]$ ou $\pm\pi/3[\pi]$;
4. $\sin x + \cos x - \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2}+1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) - \dfrac{\sin(2x)}{\sqrt{2}+1} = \cos(\frac{\pi}{4} - x) \Leftrightarrow \sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{4} - x) = \sin(x + \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow x + \pi/4 = 2x$ ou $\pi - 2x[2\pi] \Leftrightarrow x = \pi/4[2\pi]$ ou $x = \pi/4[2\pi/3] \Leftrightarrow x = \pi/4[2\pi/3]$;
5. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow \sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2(x)\left(1 - \sin^2(x)\right) + \cos^2(x)\left(1 - \cos^2(x)\right) \Leftrightarrow \sin^2(x), \cos^2(x) = 1$ ou $0 \Leftrightarrow x \in \pi/2\mathbb{Z}$;
6. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 \Leftrightarrow \sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x \Leftrightarrow \sin^2(x)\left(1 - \sin(x)\right) + \cos^2(x)\left(1 - \cos(x)\right) \Leftrightarrow \sin(x), \cos(x) = 1$ ou $0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\pi/2[2\pi]$;
7. $\tan 2x = 3\tan x \Leftrightarrow \dfrac{2\tan(x)}{1 - \tan^2(x)} = 3\tan(x) \Leftrightarrow \tan(x) = 0$ ou $\tan^2(x) = \frac{1}{3} = \tan^2(\pi/6) \Leftrightarrow x = 0[\pi]$ ou $x = \pm\pi/6[\pi]$;
8. avec bon ensemble de définition : $\dfrac{\tan x + \tan 4x}{1 - \tan x \tan 4x} = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2\tan x} \Leftrightarrow \tan(5x) = \tan(2x) \Leftrightarrow \sin(2x)\sin(5x) - \cos(5x)\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(7x) = 0 \Leftrightarrow x = \pi/14[\pi/7]$ et $x \neq \pi/2[\pi]$ (pour quantité bien définie) $\Leftrightarrow x = \pm\pi/14, \pm 3\pi/14, \pm 5\pi/14[\pi]$.

Exercice 8 [Un calcul de sinus]

1. $\sin(2x) = \cos(3x) = \sin(\pi/2 - 3x) \Leftrightarrow 2x = \pi/2 - 3x[2\pi]$ ou $\pi/2 + 3x[2\pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10}[2\pi/5]$ ou $x = -\pi/2[2\pi]$.
2. $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ et $\cos(3x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(2x)\sin(x) = \cos(x)\left(1 - 4\sin^2(x)\right)$ d'où : $\sin(2x) - \cos(3x) = \cos(x) \cdot \left[4\sin^2(x) + 2\sin(x) - 1\right]$.
3. avec $x = \pi/10$: $0 = \cos(\pi/10)\left(4\sin^2(\pi/10) + 2\sin(\pi/10) - 1\right)$ donc $\sin(\pi/10)$ est solution de $4X^2 + 2X - 1 = 0$ puis $\sin(\pi/10) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ (l'autre racine est du mauvais signe)

Exercice 9 [Factorisation d'expressions trigonométriques]

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha + \beta = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = 2\cos(\alpha - \beta/2)\sin(\alpha + \beta/2) + 2\sin(\alpha + \beta/2)\cos(\alpha + \beta/2) = \cos(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)$;
2. $1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + \cos\beta + \gamma + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos^2(\beta + \gamma/2) + 2\cos(\beta + \gamma/2)\cos(\beta - \gamma/2) = 4\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)$.

Exercice 10 [Réciproques de fonctions circulaires]

1. $x \in]-1;1[$ et $\tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$;
2. $x \in [-1;1]$ et $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$;
3. $x \in [-1;1]$ et $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$;
4. $x \in [-1;1]$ et $\cos(2\arccos(x)) = 2x^2 - 1$;
5. $x \in [-1;1] \setminus \{\pm\sqrt{2}/2\}$ et $\tan(2\arcsin(x)) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$;

6. $x \in [-1;1]$ et $\sin(2\arccos(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 11 [Quelques égalités]

1. $x \in]-1;1[$; (dériver ou) prendre la tangente $\arcsin(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;
2. $x \in \mathbb{R}$; (dériver ou) prendre la tangente $\arctan(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;
3. $x \in [0;1]$; dériver (ou prendre le sinus) $\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$;
4. $x \in [-1;1[$; dériver (ou prendre la tangente) $\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$.

Exercice 12 [Inégalités classiques hyperboliques]

On dérive et on évalue en 0. Et 0 est le seul cas d'égalité pour chacune.

Exercice 13 [Équations circulaires hyperboliques]

On pose $X = e^x$ et on résout sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation en X obtenue :

1. $\mathrm{sh}(x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow X^2 - 2\sqrt{3}X - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(\sqrt{3}+2)$
2. $\mathrm{ch}(x) = \frac{5}{3} \Leftrightarrow 3X^2 - 10X + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\ln(3)$
3. parité : résout sur $\mathbb{R}_+$; solution évidente ($x = 0$) unique par stricte monotonie ;$3\mathrm{ch}(2x) + 4\mathrm{ch}(x) = 7 \Leftrightarrow x = 0$
4. $\mathrm{sh}(2x) = \mathrm{ch}(x) \Leftrightarrow X^4 - X^3 - X - 1 = 0 \Leftrightarrow (X^2+1)(X^2-X-1) = 0 \Leftrightarrow x = \ln(\varphi)$
5. $16\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) = 15 \Leftrightarrow 4X^4 - 15X^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow X^2 = 4 \Leftrightarrow X = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$
6. $\mathrm{sh}(x) + \frac{2}{\mathrm{sh}(x)} = 3 \Leftrightarrow \mathrm{sh}(x) = 1$ ou $2 \Leftrightarrow X = 2+\sqrt{5}$ ou $1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x = \ln(2+\sqrt{5})$ ou $\ln(1+\sqrt{2})$

Exercice 14 [Fonctions circulaires et hyperboliques]

Montrer l'égalité sur $\mathbb{R}_+$ (en dérivant et évaluation en 0) et l'étendre à $\mathbb{R}_-$ par parité/imparité (ou passer au carré et faire sur $\mathbb{R}$) : $|\arctan(\mathrm{sh}\, x)| = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\, x}\right)$.