Feuille d'exercices n^{o}5 : Les fonctions usuelles

Exercice 1 [Équations autours des logarithmes et puissances]
Résoudre les équations suivantes :

1. $2^{3x+1} - 2^{2x} - 2^{x+3} + 4 = 0$;
2. $\ln x - \frac{1}{\ln x} = \frac{3}{2}$;
3. $2^{x^2} = 3^{x^3}$;
4. $2^{x+4} + 3^x = 2^{x+2} + 3^{x+2}$;
5. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$;
6. $2^x + 3^x = 5$;
7. $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$;
8. $\pi^{\sin^2(x)} = \cos(\pi x)$.

Exercice 2 [Système et étude de fonction]
Pour $a > 0$, étudier les variations de la fonction : $x \mapsto x + a + \frac{1}{ax}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

En déduire les solutions du système : $\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ e^x + e^y + e^z & = & 3 \end{array} \right.$.

Exercice 3 [Une inégalité]
Montrer que, si $x \in]0;1[$, alors : $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.

Exercice 4 [Utilisation d'une inégalité classique]
Montrer que, si $x > -1$, alors : $\ln(1+x) \leqslant x$.

En déduire que, si $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$.

Exercice 5 [Limites et croissances comparées]
Calculer les limites suivantes en utilisant les limites classiques :

1. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \sqrt{|\ln(x)|}$;
2. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{(x^x)}$;
3. $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^x)^x$;
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{\ln x}}$;
5. $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$;
6. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$;
7. $\lim\limits_{x \to 0^+} [\ln(1+x)]^x$;
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \dfrac{x}{2}\right]$;
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{\ln x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$;
10. $\lim\limits_{x \to 0^+} \left[\dfrac{x^{(x^x)} \ln x}{x^x - 1}\right]^x$.

Exercice 6 [Étude de fonctions]
Faire l'étude complète de la fonction $f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ en étudiant bien les limites aux bornes de son ensemble de définition (et les prolongement éventuels).

Exercice 7 [Équations trigonométriques]
Montrer les équivalences suivantes entre équations trigonométriques, et les résoudre :

1. $\sin 9x + \sin 5x + 2\sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \left[\cos(2x) = 0 \text{ ou } \sin(7x) = \dfrac{1}{2}\right]$;
2. $\sin 2x + \sin 6x = \sin 4x \Leftrightarrow \left[\sin(4x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = \dfrac{1}{2}\right]$;
3. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\cos(3x) = 0 \text{ ou } \cos(2x) = -\dfrac{1}{2}\right]$;
4. $\sin x + \cos x - \dfrac{\sin 2x}{\sqrt{2} + 1} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \Leftrightarrow \left[\sin(2x) = \cos(\frac{\pi}{4} - x)\right]$;

5. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow \left[\sin^2(x), \cos^2(x) = 1 \text{ ou } 0\right]$;
6. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 \Leftrightarrow [\sin(x), \cos(x) = 1 \text{ ou } 0]$;
7. $\tan 2x = 3\tan x \Leftrightarrow \left[\tan(x) = 0 \text{ ou } \tan^2(x) = \frac{1}{3}\right]$;
8. $\dfrac{\tan x + \tan 4x}{1 - \tan x \tan 4x} = \dfrac{1 - \tan^2 x}{2\tan x} \Leftrightarrow \left[\cos(7x) = 0 \text{ et } \sin^2(x) \neq 1\right]$.

Exercice 8 [Un calcul de sinus]
On se propose de calculer $\sin(\frac{\pi}{10})$.

1. Déterminer les solutions de l'équation : $\sin(2x) = \cos(3x)$.
2. Montrer que l'on a : $\sin(2x) - \cos(3x) = \cos(x) \cdot \left[4\sin^2(x) + 2\sin(x) - 1\right]$.
3. En déduire la valeur de $\sin(\frac{\pi}{10})$.

Exercice 9 [Factorisation d'expressions trigonométriques]
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Factoriser les expressions suivantes :

1. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$;
2. $1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$.

Exercice 10 [Réciproques de fonctions circulaires]
Simplifier les expressions suivantes, en précisant l'intervalle auquel x appartient :

1. $\tan(\arcsin(x))$;
2. $\sin(\arccos(x))$;
3. $\cos(\arcsin(x))$;
4. $\cos(2\arccos(x))$;
5. $\tan(2\arcsin(x))$;
6. $\sin(2\arccos(x))$.

Exercice 11 [Quelques égalités] Préciser sur quel ensemble les égalités suivantes ont un sens et les démontrer (on pourra chercher à dériver les expressions) :

1. $\arcsin(x) = \arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;
2. $\arctan(x) = \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;
3. $\arcsin(\sqrt{x}) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$;
4. $\arctan\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$.

Exercice 12 [Inégalités classiques hyperboliques]
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer les inégalités suivantes, en précisant les cas d'égalité :

1. $\mathrm{sh}(x) \geqslant x$;
2. $\mathrm{ch}(x) \geqslant 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 13 [Équations circulaires hyperboliques]
Résoudre les équations suivantes :

1. $\mathrm{sh}(x) = \sqrt{3}$
2. $\mathrm{ch}(x) = \frac{5}{3}$
3. $3\mathrm{ch}(2x) + 4\mathrm{ch}(x) = 7$
4. $\mathrm{sh}(2x) = \mathrm{ch}(x)$
5. $16\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(x) = 15$
6. $\mathrm{sh}(x) + \frac{2}{\mathrm{sh}(x)} = 3$

Exercice 14 [Fonctions circulaires et hyperboliques]
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\arctan(\mathrm{sh}\, x)| = \arccos\left(\frac{1}{\mathrm{ch}\, x}\right)$.