

Feuille d'exercices n°4 : Sommes, produits et systèmes

Exercice 1 [Premiers exemples de sommes]

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{k=2}^n \frac{5^{3k-1}}{3^{2k+2}}; \quad 2. \sum_{k=0}^n \frac{7^k}{5^{n-k}}; \quad 3. \sum_{l=1}^n \frac{3^{l+2}}{2^{2l+1}} - \frac{1}{4}(-3)^l; \quad 4. \sum_{k=0}^{2n+1} x(1-x^2)^{k+1}.$$

Exercice 2 [Premiers exemples de produits]

Calculer les produits suivantes :

$$1. \prod_{k=1}^n 3k; \quad 3. \prod_{k=0}^n 2^{2^k}; \quad 5. \prod_{k=1}^n \exp(k^2);$$

$$2. \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right); \quad 4. \prod_{k=1}^n (4k^2 - 1); \quad 6. \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Exercice 3 [Sommes de puissances]

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose : $S_m = \sum_{k=1}^n x_k^m$.

1. On suppose que $S_2 = 0$. Montrer que tous les x_k sont nuls.
2. On suppose que $S_1 = S_2 = n$. Montrer que tous les x_k sont égaux à 1.
3. On suppose que $S_2 = S_3 = S_4$. Montrer que tous les x_k sont égaux à 0 ou 1.

Exercice 4 [Sommes des cubes]

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 5 [Simplification d'une somme]

Si $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $\sum_{k=0}^n \frac{2^k}{x^{2^k} + 1} = \frac{1}{x-1} - \frac{2^{n+1}}{x^{2^{n+1}} - 1}$.

Exercice 6 [Somme géométrique dérivée]

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $q \neq 1$, on pose : $S = \sum_{k=1}^n kq^k$.

1. Montrer que $S = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k q^k$.
2. En déduire une expression simple de S .
3. Retrouver ce résultat en calculant $(1-q) \cdot S$.

Exercice 7 [Simplification d'un produit]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier le produit suivant : $\prod_{k=1}^n \frac{2k+3}{2k-1}$.

Exercice 8 [Un produit géométrique]

Pour $a \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = \prod_{k=0}^n (1 + a^{2^k})$.

1. Calculer $(1 - a) \cdot P$, et en déduire P .
2. Reconnaître une somme bien connue, et interpréter ce résultat.

Exercice 9 [Cinq produits très proches]

On se propose de calculer de proche en proche les produits suivants :

$$A = \prod_{1 \leq i, j \leq n} ij, \quad B = \prod_{1 \leq i \neq j \leq n} ij, \quad C = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} ij, \quad D = \prod_{1 \leq j \leq i \leq n} ij, \quad E = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij.$$

1. Calculer A , et en déduire B .
2. Exprimer B en fonction de C et D , et en déduire C et D puis E .

Exercice 10 [Utilisation des sommes classiques]

En utilisant les valeurs de $\sum_{k=1}^n k$ et de $\sum_{k=1}^n k^2$, calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\sum_{k=1}^n k(k+1)$;
2. $1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + \dots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1$.

Exercice 11 [Groupement dans une somme]

En regroupant habilement les termes, calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes (on pourra d'abord traiter le cas où n est pair) :

1. $\sum_{k=1}^n (-1)^k k$;
2. $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^2$;
3. $\sum_{k=1}^n (-1)^k k^3$.

Exercice 12 [Sommes télescopiques]

En faisant apparaître des télescopes, calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$;
2. $\sum_{k=1}^n k \cdot k!$;
3. $\sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)!}$;
4. $\sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

Exercice 13 [Un autre télescopage]

1. Montrer qu'il existe des réels a, b, c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, une expression simple de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 14 [Sommes doubles]

Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k (k+l)$;
2. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (k+l)^2$;
3. $\sum_{k=1}^n \sum_{l=k+1}^n kl$;

$$4. \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \min(k, l);$$

$$5. \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k |l - k|;$$

$$6. \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |l - k|.$$

Exercice 15 [Découpage d'une somme double]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $C_n = \sum_{k=1}^n \sum_{l=k+1}^n (k + l)$.

- Justifier que : $\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n (k + l) = 2C_n + 2 \sum_{k=1}^n k$.
- En déduire la valeur de C_n .

Exercice 16 [Formule de Cauchy]

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\left(\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{a_k a_l}{k + l - 1}$.

Exercice 17 [Formule du binôme 1]

Si $n \in \mathbb{N}^*$:

- Justifier qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $(2 + \sqrt{3})^n = a + b\sqrt{3}$, et vérifier que : $3b^2 = a^2 - 1$.
- Montrer que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.

Exercice 18 [Formule du binôme 2]

En utilisant judicieusement la formule du binôme, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

- $2^n \geq n + 1$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 19 [Sommes de coefficients binomiaux 1]

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k};$$

$$2. \sum_{k=0}^n \binom{n}{k};$$

$$3. \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 20 [Sommes de coefficients binomiaux 2]

Simplifier les expressions suivantes :

$$1. \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1};$$

$$3. \sum_{(k,l) \in E} \binom{n}{l} 2^k, E = \{(k, l) \in \mathbb{N}^2, 0 \leq k \neq l \leq n\};$$

$$2. \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} 2^{n-3k} (-1)^k \text{ (avec } n \geq 2);$$

$$4. \sum_{l=0}^n \sum_{k=l}^n \binom{k}{l} x^l \text{ (où } x \neq 0).$$

Exercice 21 [Majoration et coefficients binomiaux]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

- Montrer que, si $k \geq 1$: $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$.
- En déduire que : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$.

Exercice 22 [Majoration de factorielle]

Soit $n \geq 2$:

1. Montrer que : $(n!)^2 = \prod_{k=1}^n k \cdot (n - k + 1)$.

2. En déduire que : $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Exercice 23 [Égalité de produits]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer l'égalité : $\prod_{k=1}^n (4k - 2) = \prod_{k=1}^n (n + k)$, et donner une expression simple de leur valeur.

Exercice 24 [Résolution de systèmes]

À l'aide du pivot de Gauss, déterminer les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y - 4z = 3 \end{cases}, \begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 - 10x_2 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 20x_2 + 6x_3 + x_4 = 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 6x_1 - 12x_2 - 12x_3 + 16x_4 = 4 \end{cases}, \begin{cases} 3x - 6y + z = 7 \\ x + 2y + z = 5 \\ -2x + 5y - 2z = -1 \end{cases}.$$

Exercice 25 [Systèmes à paramètre]

Discuter, suivant la valeur de m , des solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \end{cases}, \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} mx + (1 - m)y + (1 - m)z = m^2 \\ mx + (1 + m)y + (1 + m)z = m - m^2 \\ x + y + z = 1 - m \end{cases}$$

Exercice 26 [Un grand système]

Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots + \vdots + \vdots + \vdots + \vdots = \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1 \end{cases}$$

Exercice 27 [Et un grand système difficile]

Discuter, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et suivant la valeur de $a \in \mathbb{C}$, des solutions du système :

$$\begin{cases} ax_1 = x_2 + 1 \\ ax_2 = x_3 + 1 \\ \vdots \\ ax_{n-1} = x_n + 1 \\ ax_n = x_1 + 1 \end{cases}$$