Feuille d'exercices n^{o}2 : Rappels et compléments de calcul

Exercice 1 [Fonction additives sur les rationnels]

1. si $f : x \mapsto a$, alors : $f(x+y) = a = f(x) + f(y) = 2a$ donc $a = 0$. Et $f : x \mapsto 0$ convient bien.
2. $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$
   $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$.
3. Par récurrence pour $n \in \mathbb{N}$. Par parité pour $n \in \mathbb{Z}$.
4. $a = f(1) = f(q \cdot 1/q) = qf(1/q)$ donc $f(1/q) = \dfrac{1}{q} \cdot a$
   $f(p/q) = f(p \cdot 1/q) = pf(1/q) = \dfrac{p}{q} \cdot a$.

Exercice 2 [Somme harmonique]
Par récurrence forte, on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ ''H_n \notin \mathbb{Q} \text{ en tant que quotient d'un entier impair sur un entier pair}''.$$

Initialisation immédiate. Pour l'hérédité, on distingue si n pair ou impair :
- si n pair : $P_n \Rightarrow P_{n+1}$;
- si n impair : $P_{(n+1)/2} \Rightarrow P_{n+1}$.

Exercice 3 [Quelques inégalités]

1. tout ramener à gauche et reconnaître un carré ;
2. tout ramener à gauche pour obtenir $b(a-c)^2 + c(a-b)^2 + a(b-c)^2$;
3. en développant : $\dfrac{ab}{a+b} \leqslant \dfrac{a+b}{4}$ puis on somme en échangeant les rôles de a, b, c.
4. constater $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{c^2} \geqslant 2\dfrac{a}{c}$ et échanger rôles

Exercice 4 [Manipulation de valeurs absolues]
Pour les 1,2,3 : comme on a toujours des quantités positives, on peut mettre au carré en préservant les équivalences.

Pour 4 : se restreindre à $x \geqslant 2$ et voir que c'est impossible.

Exercice 5 [Manipulation de racines carrées]
Analyse–synthèse en mettant au carré.

Ou restreindre le domaine.

Exercice 6 [Équation et inégalité]

1. Somme de carrés (donc positifs) : nulle ssi $a + bx = 0 = c + dx$ donc il y a une solution ssi $ad = bc$ et cette solution est $-a/b = -c/d$.
2. on développe le carré : si pas de solution le discriminant est strictement négatif, et sinon il est nul.
   $\Delta = 4\left((ab+cd)^2 - (b^2+d^2)(a^2+c^2)\right) \leqslant 0$ avec égalité ssi $ad = bc$.

Exercice 7 [Unions et intersections d'intervalles]

1. il suffit de montrer que l'intersection de segments est soit vide soit un intervalle, et c'est clair par disjonction de cas.
2. exemple de $\mathbb{R}^*$. ok si intersection non vide.
   Réciproque fausse : $[0;1[\cup[1;2]=[0;2]$.
3. intersection ok (par récurrence)
   union : il suffit que l'intersection de tous les intervalles soit non vide.

Exercice 8 [Simplification de parties entières]

1. partir de $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$. On déduit : $n\lfloor x\rfloor \leqslant nx < n\lfloor x\rfloor + n$ donc $n\lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor nx\rfloor < n\lfloor x\rfloor + n$ donc (maximalité) $\lfloor x\rfloor \leqslant \dfrac{\lfloor nx\rfloor}{n} < \lfloor x\rfloor + 1$ d'où l'égalité par définition
2. poser $x/2 = \lfloor x/2\rfloor + r$ pour $r \in [0;1[$ et distinguer selon $r < 1/2$ ou $r \geqslant 1/2$

Exercice 9 [Partie entière et opposé]
Par disjonction de cas, comme pour $x \notin \mathbb{Z}$: $\lfloor x\rfloor < x < \lfloor x\rfloor + 1$ (et pareil pour $-x$)

Exercice 10 [Parties entières et inégalités]

1. par maximalité. Réciproque fausse ($x = 3/4$ et $y = 1/2$).
2. Inégalité entre entiers : $< k$ se transforme en $\leqslant k-1$.

Exercice 11 [Calcul d'une partie entière]
Mettre au carré, simplifier, mettre au carré, simplifier, etc.

Exercice 12 [Entiers contenus dans un intervalle]
Distinguer suivant $a, b \in \mathbb{Z}$ ou $\notin \mathbb{Z}$.

Exercice 13 [Partie entière et répartition des carrés]

1. 1 si m impair et 0 sinon.
2. Par l'absurde : si un tel m existait, on aurait $4n+1 < m^2 \leqslant 4n+3$. Contradiction avec la question 1.
3. Il suffit de voir que $\sqrt{4n+1} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{4n+3}$ ce qui se montre en mettant au carré (légitime comme tout est $\geqslant 0$).