Feuille d'exercices n^{o}2 : Rappels et compléments de calcul

Exercice 1 [Fonction additives sur les rationnels]
On considère $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{Q},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Étudier les fonctions constantes possibles pour f.
2. Calculer $f(0)$, et montrer que, si $x \in \mathbb{Q}$, alors : $f(-x) = -f(x)$.
3. Montrer que, si $x \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors $f(nx) = nf(x)$.
4. En déduire que, si on pose $a = f(1)$, alors : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = ax$.

Exercice 2 [Somme harmonique]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Montrer que, si $n \geqslant 2$, alors H_n n'est pas entier (on pourra montrer par récurrence que H_n est le quotient d'un entier impair par un entier pair, en distinguant selon la parité de n).

Exercice 3 [Quelques inégalités]
Montrer les inégalités suivantes :

1. si $a, b \in \mathbb{R}$: $(a+b)^2 \geqslant 4ab$;
2. si $a, b, c \in \mathbb{R}_+$: $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$;
3. si $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leqslant \frac{a+b+c}{2}$;
4. si $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$: $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$.

Exercice 4 [Manipulation de valeurs absolues]
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|2x-1| = |x+4|$;
2. $|x-1| \leqslant |x+3|$;
3. $|3x| \leqslant |2x+3|$;
4. $|x+5| = x-2$.

Exercice 5 [Manipulation de racines carrées]
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x-3} \leqslant \sqrt{2x-5}$;
2. $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x-2} = 2$;
3. $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$;
4. $\sqrt{x - 4\sqrt{x+4}} \geqslant 3$.

Exercice 6 [Équation et inégalité] Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Étudier les solutions de l'équation en x : $(a+bx)^2 + (c+dx)^2 = 0$.
2. En déduire que $|ab+cd| \leqslant \sqrt{a^2+c^2}\sqrt{b^2+d^2}$ et donner les cas d'égalité.

Exercice 7 [Unions et intersections d'intervalles]

1. Montrer que l'intersection de deux intervalles est soit vide, soit un intervalle.
2. Montrer que l'union de deux intervalles n'est en général pas un intervalle. Plus précisément montrer que c'est un intervalle si l'intersection n'est pas vide. Que penser de la réciproque ?
3. Généraliser les points précédents à davantage d'intervalles.

Exercice 8 [Simplification de parties entières]
Montrer les égalités suivantes :

1. si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$;
2. si $x \in \mathbb{R}$: $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 9 [Partie entière et opposé]
Montrer que : $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 10 [Parties entières et inégalités]
Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $x \leqslant y$, alors $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$. La réciproque est-elle vraie ?
2. Montrer que : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 11 [Calcul d'une partie entière]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $x = \sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + \sqrt{64n^2 + 1}}}}$. Montrer que $\lfloor x \rfloor = n$.

Exercice 12 [Entiers contenus dans un intervalle]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\mathrm{Card}([a; b] \cap \mathbb{Z}) = \lfloor b \rfloor + \lfloor 1 - a \rfloor$.

Exercice 13 [Partie entière et répartition des carrés]
Soit $n \in \mathbb{N}$:

1. Rappeler, pour $m \in \mathbb{N}$, les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de m^2 par 4.
2. En déduire qu'il n'existe pas d'entiers entre dans l'intervalle $]\sqrt{4n+1}; \sqrt{4n+3}]$.
3. En déduire que : $\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$.