Feuille d'exercices n^{o}29 : Espaces préhilbertiens

Exercice 1 [Produits scalaires]

Montrer que les applications suivantes sont des produits scalaires sur les espaces E considérés (on montrera bien que les applications ont bien un sens) :

1. $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)Q(n)}{n!}$;
2. $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{P(1/n)Q(1/n)}{n^2}$;
3. $E = \mathbb{R}[X]$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)e^{-n}$;
4. $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = \int_0^1 tf(t)g(t)\mathrm{d}t$;
5. $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$, $\langle f, g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\mathrm{d}t$;
6. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$;
7. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ deux-à-deux distincts ;
8. $E = \mathbb{R}_n[X]$, $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$ pour $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 [Un passage par les complexes]

Montrer que $\langle P, Q\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta})\mathrm{d}\theta$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$, et que $(1, X, \dots, X^n)$ est orthonormée. En déduire une expression sans intégrale de $\langle P, Q\rangle$.

Exercice 3 [Formes bilinéaires en dimension finie]

On considère E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et φ forme bilinéaire sur E. On fixe $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E.

1. Pour $(x_i), (y_j) \in \mathbb{R}^n$, montrer que : $\varphi(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \varphi(e_i, e_j)$.
2. En déduire qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x, y \in E,\ \varphi(x, y) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)^T \cdot A \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$$
et donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que φ soit symétrique ou antisymétrique.
3. En déduire les dimensions des espaces des formes bilinéaires (quelconques, symétriques, antisymétriques) sur E. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4 [Orthogonalité et dilatation]

Soit E un espace préhilbertien, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x, y \in E,\ x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \lambda\|x\|$.

On pourra utiliser, après l'avoir montré, que, si $x, y \in E$ sont de norme 1, alors $(x - y) \perp (x + y)$.

Exercice 5 [Produit scalaire associé à une base]

On considère E un espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Montrer que l'application :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$
est l'unique produit scalaire pour lequel $\mathcal{B}$ est orthonormée.

Exercice 6 [Théorème de représentation de Riesz]

Soit E un espace euclidien. Pour $a \in E$, on note φ_a l'application définie sur E par $\varphi_a : x \mapsto \langle x, a\rangle$.

1. Montrer que, pour tout $a \in E$, l'application φ_a est une forme linéaire sur E.
2. Montrer que l'application $a \mapsto \varphi_a$ est une application linéaire injective de E dans E^*.
3. En déduire que, si $\psi \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ tel que $\psi = \varphi_a$.

Exercice 7 [Un peu comme Cauchy–Schwarz]

On considère φ forme bilinéaire symétrique positive sur un espace vectoriel E. Montrer que :

$$\forall x, y \in E,\ |\varphi(x,y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x,x)\varphi(y,y)}.$$

Que penser du cas d'égalité ?

Exercice 8 [Intégrale de l'inverse et inverse de l'intégrale]

Soit $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^*)$. Justifier que $\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$ est bien défini, et que l'on a :

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right) \geqslant 1$$

et donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que l'on ait une égalité.

Exercice 9 [Intégrale et dérivée]

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \frac{1}{3}\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t$$

et préciser la situation d'égalité.

Exercice 10 [Algorithme de Gram–Schmidt]

Orthonormaliser les familles suivantes par l'algorithme de Gram–Schmidt :

1. $((1,0,1),(1,1,1),(-1,1,0))$ pour $\mathbb{R}^3$ et le produit scalaire canonique ;
2. $(1, X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{2} P^{(k)}(k+1)Q^{(k)}(k+1)$;
3. $(1, X, X^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$;
4. $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}\right)$ pour $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et le produit scalaire canonique.

Exercice 11 [Unicité dans Gram–Schmidt]

Montrer que, si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre d'un espace préhilbertien E, il existe une unique famille orthonormée $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E telle que :

$$\forall k \in [\![1; n]\!],\ \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k) \text{ et } \langle x_k, e_k\rangle > 0$$

et que cette famille est celle donnée par l'algorithme de Gram–Schmidt.

Exercice 12 [Un peu comme Gram-Schmidt]

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$, muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

Montrer qu'il existe une unique base orthogonale de polynômes unitaires $(P_0, \dots, P_n)$, telle que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, $\deg(P_k) = k$.

Exercice 13 [Changement de base orthonormée]

On considère E un espace euclidien muni d'une bon $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et d'une base autre $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$. On pose $O = \mathcal{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est orthonormée si, et seulement si, $O^T = O^{-1}$.

Exercice 14 [Orthogonal et sommes d'espaces]

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'une espace préhilbertien E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$.
2. Si E est euclidien, montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$. Est-ce vrai si E est seulement supposé préhilbertien ?

Exercice 15 [Polynômes de Tchebychev]

Montrer que la famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des polynômes de Tchebychev (dont on rappelle qu'elle vérifie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ que $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta)))$ est orthogonale pour le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: $\langle P, Q\rangle = \int_0^{2\pi} P(\cos(\theta))Q(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta$ (dont on vérifiera d'abord que c'est un bien un produit scalaire).

Exercice 16 [Endomorphisme symétrique]

Soit E euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x, y \in E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée est symétrique, et que $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 17 [Distance à un espace vectoriel]

Minimiser pour $a, b \in \mathbb{R}$ les quantités suivantes :

1. $\int_0^1 (t^3 - at - b)^2 \mathrm{d}t$;
2. $\int_{-1}^1 (\cos(t) - at^2 - b)^2 \mathrm{d}t$;
3. $\int_0^1 (t^2 - at - b)e^{-t} \mathrm{d}t$.

Exercice 18 [Caractérisation des projecteurs orthogonaux]

On considère E un espace préhilbertien.

1. Montrer que les vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux si, et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a : $\|x + ty\| \geqslant \|x\|$.
2. En déduire qu'un projecteur p de E est orthogonal si, et seulement si : $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Exercice 19 [Distance à un (hyper)plan]

Soit E un espace préhilbertien, et $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E de direction H. On se donne également n un vecteur unitaire normal à H et $h \in \mathcal{H}$.

1. Montrer que $\mathcal{H} = \{x \in E \,|\, \langle x, a\rangle = \langle h, a\rangle\}$.
2. Montrer que pour tout $x \in E$ on a : $d(x, \mathcal{H}) = |\langle x - h, a\rangle|$.
3. Appliquer le résultat précédent au plan $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz + d = 0$ pour déduire que, si $M = (x_M, y_M, z_M) \in \mathbb{R}^3$, alors :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exercice 20 [Matrice et déterminant de Gram]

On considère E un espace préhilbertien. On fixe $x_1, \dots, x_n \in E$, et on note $M = (\langle x_i, x_j\rangle)$ (qu'on appelle matrice de Gram de $(x_1, \dots, x_n)$) et $G(x_1, \dots, x_n)$ son déterminant.

On pose $\mathcal{B}$ une base orthonormale de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, et on pose $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

1. Exprimer M en fonction de X, et montrer que $\mathrm{Ker} M = \mathrm{Ker} X$.

2. En déduire que $G(x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0$, avec égalité si, et seulement si, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée.
3. Montrer que, si x_n est orthogonal à $x_1, \ldots, x_{n-1}$, alors : $G(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot \|x_n\|^2$.
4. On note p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Déduire des résultats précédents que $G(x_1, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_{n-1}) \cdot \|x_n p(x_n)\|^2$.
5. En déduire que, si F est un espace vectoriel de E de dimension finie, avec $(f_1, \ldots, f_n)$ une base quelconque de F, alors pour tout $x \in E$ on a :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{G(f_1, \ldots, f_n, x)}{G(f_1, \ldots, f_n)}}.$$

Exercice 21 [Polynômes de Legendre]

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

On note pour $n \in \mathbb{N}$: $P_n = (X^2 - 1)^n$ et $Q_n = P_n^{(n)}$.

1. Montrer que la famille (Q_n) est orthogonale, et calculer $\|Q_n\|$ pour tout n.
2. Montrer que la famille $(W_0, \ldots, W_n)$ définie par $W_k = \dfrac{Q_k}{\|Q_k\|}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ est la famille obtenue en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $(1, X, \ldots, X^n)$.

Exercice 22 [Orthogonalité en dimension infinie 1]

On considère $E = \mathrm{l}^1(\mathbb{N})$ (l'ensemble des suites réelles dont les séries associées sont absolument convergentes), et F l'ensemble des suites réelles à support fini (c'est-à-dire nulles à partir d'un certain rang).

1. Montrer que l'application $(u, v) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que F est un sev de E et calculer $F^\perp$.
3. Comparer F et $\left(F^\perp\right)^\perp$.

Exercice 23 [Orthogonalité en dimension infinie 2]

On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

1. Calculer $F^\perp$ pour les espaces F suivants :

   (a) $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$;

   (b) $F = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$.

2. Montrer que les espaces $F_- = \{f \in E \mid f|_{[0;1/2]} = 0\}$ et $F_+ = \{f \in E \mid f|_{[1/2;1]} = 0\}$ vérifient $F_-^\perp = F_+$ et $F_+^\perp = F_-$. Les espaces F_+ et F_- sont-ils supplémentaires dans E ?

   Indication : pour montrer que $F_-^\perp \subset F_+$, on pourra raisonner par l'absurde et adopter une preuve proche de celle des intégrales nulles de fonctions continues positives.