Feuille d'exercices n^{o}28 : Séries numériques

Exercice 1 [Natures de séries à termes positifs 1]

Déterminer la nature des séries suivantes de terme général :

1. $\dfrac{\ln(n)}{n^5}$;
2. $e^{-\sqrt{5+n}}$;
3. $\dfrac{n^4\ln(3n)}{e^{2n}}$;
4. $\ln\left(\dfrac{3+\sin\frac{1}{n}}{3-\sin\frac{1}{n}}\right)$;
5. $\dfrac{n+e^{-n}}{(n+1)^3}$;
6. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$;
7. $\dfrac{(-1)^n\cos(n)}{n^2\sqrt{n}}$;
8. $\sqrt{n^2-1}-n$;
9. $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^{n\sqrt{n}}$;
10. $\dfrac{1}{n^2+\sin n^6}$;
11. $\dfrac{2+(-1)^n}{3^n}$;
12. $\dfrac{1}{\binom{n}{2}}$;
13. $\ln\dfrac{n^2+3n+2}{n^2+3n}$;
14. $\sin\frac{1}{n}-\tan\frac{1}{n}$;
15. $\dfrac{n}{(n+1)!}$;
16. $\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$;
17. $\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}$;
18. $\dfrac{1}{n^2-\ln(n)}$;
19. $\left(\cos\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$;
20. $\dfrac{(\ln(n))^n}{n^{\ln(n)}}$;
21. $\dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$.

Exercice 2 [Natures de séries à termes positifs 2]

On suppose que la série $\sum u_n$ est une série convergente à termes positifs. Déterminer la nature des séries de terme général :

1. u_n^2 ;
2. $\dfrac{u_n}{1+u_n}$;
3. $\dfrac{u_n}{1-u_n}$;
4. $\sqrt{u_nu_{n+1}}$;
5. $\sqrt{u_nu_{2n}}$;
6. $\frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

Inversement, pour chacune des séries ci-dessus, la converge implique-t-elle celle de la série $\sum u_n$?

Exercice 3 [Natures de séries à termes positifs 3]

Dire en fonction des paramètres si les séries de terme général suivant convergent :

1. $e^{\frac{1}{n}}-a-\frac{b}{n}$ $(a,b\in\mathbb{R})$;
2. $\cos\frac{1}{n}-a-\frac{b}{n}$ $(a,b\in\mathbb{R})$;
3. $\dfrac{1}{an+b}-\dfrac{c}{n}$ $(a,b,c\in\mathbb{R},\ (a,b)\neq(0,0))$;
4. $\dfrac{a^n}{1+b^n}$ $(a,b\in\mathbb{R}_+^*)$;
5. $\mathrm{Arctan}(n+a)-\mathrm{Arctan}(n)$ $(a\in\mathbb{R})$;
6. $\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+k)!}$ $(k\in\mathbb{N})$;
7. $\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)$ $(a,b\in\mathbb{R})$;
8. $\sqrt{n}+a\sqrt{n+1}+b\sqrt{n+2}$ $(a,b\in\mathbb{R})$;
9. $\dfrac{a}{\sqrt{3n+1}}+\dfrac{b}{\sqrt{3n+2}}+\dfrac{c}{\sqrt{3n+3}}$ $(a,b,c\in\mathbb{R})$

Exercice 4 [Critère de d'Alembert]

On considère $\sum u_n$ une série à termes non nuls, et on suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l\in\overline{\mathbb{R}_+}$.

1. Montrer que, si $l<1$, alors $\sum u_n$ converge absolument.
2. Montrer que, si $l>1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
3. Monter que, lorsque $l=1$, on ne peut rien conclure a priori.

Exercice 5 [Critère de Cauchy]

On considère $\sum u_n$ une série à termes positifs, et on suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}=l\in\overline{\mathbb{R}}$.

1. Montrer que, si $l<1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que, si $l>1$, alors $\sum u_n$ diverge.

3. Monter que, lorsque $l = 1$, on ne peut rien conclure a priori.

Exercice 6 [Puissance d'une série par une suite]

On considère (u_n) une suite réelle positive et (v_n) une suite réelle. On suppose que $v_n = 1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$ et que la série $\sum u_n$ converge.

Montrer que la série $\sum u_n^{v_n}$ converge.

Exercice 7 [Produit d'une suite par une puissance]

On considère (u_n) positive décroissante et $\alpha > 0$ tels que la série $\sum n^\alpha u_n$ converge.

Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n} k^\alpha u_k \geqslant n^{\alpha+1} u_{2n}$, et en déduire que la suite $(n^{\alpha+1} u_n)$ tend vers 0.

Exercice 8 [Suite récurrente à paramètre]

On considère $\alpha \in \mathbb{R}$, et (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n^\alpha}$.

Étudier suivant la valeur de α la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 9 [Limite d'un produit]

On considère (u_n) une suite de réels strictement positifs, et on pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)(1+u_1)\dots(1+u_n)}.$$

1. Exprimer simplement les sommes partielles de la série $\sum v_n$, et en déduire que $\sum v_n$ converge.
   Indication : on pourra commencer par simplifier l'expression $1 - \sum_{k=0}^{n} v_k$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \prod_{k=0}^{n} (1 + u_n)$. Montrer que la suite (U_n) converge si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge.
   Indication : on pourra utiliser la fonction ln.
3. En déduire que l'on a l'équivalence :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} v_k = 1 \Leftrightarrow \sum u_n \text{ diverge.}$$

Exercice 10 [Calcul de sommes]

En utilisant des télescopages, montrer la convergence des séries suivantes, et calculer leur somme :

1. $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2+2n}$;
2. $\sum \dfrac{1}{2^n} \tan\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$
   Indication : simplifier $\dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{2}{\tan(2x)}$.
3. $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^2-1}$;
4. $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \dfrac{2}{n(n+3)}\right)$;
5. $\sum \mathrm{Arctan}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$;
   Indication : utiliser la formule de $\tan(a-b)$.

Exercice 11 [Séries géométriques dérivées]

On considère $x \in \mathbb{R}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. En utilisant l'inégalité de Taylor–Lagrange, montrer que la série $\sum \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ est absolument convergente pour tout $x \in]-1;1[$, et que sa somme vaut $(1+x)^\alpha$.

2. À l'inverse, montrer que cette série diverge grossièrement si $|x| \geqslant 1$, à moins que $\alpha \in \mathbb{N}$ (auquel cas la série est une somme finie).
3. Expliciter la formule précédente lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}_-$. Plus précisément, montrer que si $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\dots(n+k-1)(n+k)x^k = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

et interpréter ce résultat lorsque $k = 1, 2, 3$.
4. En déduire que, si P est un polynôme non nul, la série $\sum P(n)x^n$ est absolument convergente pour $x \in]-1;1[$ et diverge grossièrement sinon, et que sa somme est une fraction rationnelle en x dont le seul pôle est 1, d'ordre au plus $\deg(P)+1$.

   Indication : on pourra commencer par décomposer P dans la base $(1, X+1, (X+1)(X+2), (X+1)(X+2)(X+3), \dots)$.
5. **Application :** déterminer la somme de la série $\sum \dfrac{n^3 - 2n^2 + 1}{3^n}$.

Exercice 12 [Encadrement d'une somme partielle]

À l'aide de comparaison avec des intégrales, déterminer la partie entière de $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}}$.

Exercice 13 [Comportement en 1 de la fonction ζ]

Pour $\alpha > 1$, on pose $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. Justifier que $\zeta(\alpha)$ est bien défini pour un tel α, et, à l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un équivalent de $\zeta(\alpha)$ pour α tendant vers 1^+.

Exercice 14 [Série construite à partir des sommes partielles]

On considère $\sum u_n$ une série divergente de réels strictement positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

À l'aide d'une comparaison avec une intégrale, montrer que pour tout $\alpha > 1$ la série $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge.

Exercice 15 [Équivalent de $\ln(n!)$ (sans Stirling)]

Interpréter $\ln(n!)$ comme la somme partielle d'une série divergente, et calculer un équivalent par comparaison avec des intégrales.

Exercice 16 [Comparaison à une intégrale et paramètre]

En utilisant une comparaison avec intégrale, donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$.

Puis discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, de la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n}}{n^\alpha}$.

Exercice 17 [Développement asymptotique de la série harmonique]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

1. Montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
2. On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_{n+1} - u_n$. Étudier la convergence de la série $\sum v_n$.
3. En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $H_n = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$.

Exercice 18 [Une suite définie implicitement]

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit u_n comme l'unique solution de $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $\ln(x) = \text{Arctan}(x) + n\pi$.

Justifier que la suite (u_n) est bien définie, et donner un encadrement de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra s'aider d'un encadrement de $\text{Arctan}(x)$). En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{u_n}$.

Exercice 19 [Critère spécial des séries alternées]

On considère (u_n) une suite décroissante de réels positifs, et on pose $(v_n) = ((-1)^n u_n)$. On s'intéresse à la série $\sum v_n$, et pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

1. Étudier les monotonies des suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}).
2. En déduire que la série $\sum v_n$ converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge vers 0, et que sa somme S vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$.

   Indication : on pourra faire apparaître des suites adjacentes.
3. Dans le cas de convergence de la série $\sum v_n$, on pose pour $n \in \mathbb{N}$: $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ et que $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.
4. Application : étudier, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

Exercice 20 [La transformation d'Abel, ou généralisation des séries alternées]

On considère (u_n) suites positive décroissante tendant vers 0 de réels, et (v_n) suite de complexes telles que les sommes partielles $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ forment une suite bornée.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1} - u_k) V_k$. Ce résultat ressemble-t-il a un résultat analogue avec des intégrales ?
2. En déduire que la série $\sum u_n v_n$ converge.
3. Retrouver le critère des séries alternées.
4. En déduire que, si $\sum v_n$ converge et si $\alpha > 0$, alors la série $\sum \dfrac{v_n}{n^\alpha}$ converge.
5. On considère $\alpha > 0$ et $\theta \in \mathbb{N}$. Discuter, suivant la valeur de θ, de la convergence de la série de terme général $\dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$.