Feuille d'exercices n^{o}27 : Déterminants

Exercice 1 [Matrices antisymétriques]
Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour qu'il existe $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ inversible.

Exercice 2 [Déterminant d'une dérivation]
On considère $n \in \mathbb{N}$, et on pose : $V_n = \{x \mapsto e^x P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$. Montrer que V_n est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et que l'application $f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V_n dont on calculera le déterminant.

Exercice 3 [Déterminant d'une primitivisation]
On considère $n \in \mathbb{N}$ et on pose : $\varphi : f \mapsto \left(x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t\right)$. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x] = \{x \mapsto P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ et calculer son déterminant.

Exercice 4 [Déterminant de la multiplication matricielle]
On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et on s'intéresse à l'application $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ définie par : $\varphi : M \mapsto A \cdot M$.

1. Montrer que φ est inversible (en tant qu'élément de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$ si, et seulement si, A l'est (en tant qu'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).
2. Pour $i, j \in [\![1 : n]\!]$, exprimer $\varphi(E_{i,j})$.
3. En déduire une expression de la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis le déterminant de φ.
4. Retrouver le résultat de la première question.

Exercice 5 [Calculs de déterminants]
Calculer les déterminants suivants :

1. $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \\ 1 & 9 & 7 \end{vmatrix}$;
2. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;
3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix}$;
4. $\begin{vmatrix} 24 & -21 & 13 \\ -11 & 16 & -9 \\ 23 & -19 & 12 \end{vmatrix}$;
5. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$;
6. $\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$;
7. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$;
8. $\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ a^2+b^2 & b^2+c^2 & c^2+a^2 \\ a^3+b^3 & b^3+c^3 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$;
9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \sin(a) & \sin(b) & \sin(c) \end{vmatrix}$;
10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$;
11. $\begin{vmatrix} 0! & 1! & 2! & 3! \\ 1! & 2! & 3! & 4! \\ 2! & 3! & 4! & 5! \\ 3! & 4! & 5! & 6! \end{vmatrix}$;
12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \end{vmatrix}$;
13. $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 6 [Recherche de bases]
Dire si les familles suivantes sont des bases de E :

1. $((1+i, 1, i), (i, -1, 1-i), (-2+i, 0, -i))$ dans $E = \mathbb{C}^3$;
2. $((\lambda+3, 3\lambda+1), (2\lambda+3, 5\lambda+4))$ dans $E = \mathbb{R}^2$;
3. $(4X^2+3X-1, 2X^2-2X+3, 3X^2+2X-4)$ dans $E = \mathbb{R}_2[X]$;
4. $(X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ dans $E = \mathbb{R}_2[X]$;

5. $((X-a)(X-b),(X-a)(X-c),(X-b)(X-c))$ dans $E=\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 7 [Introduction de variable pour un calcul de déterminant]

On considère $a \neq b$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des scalaires et on pose la fonction $\Delta : x \mapsto \begin{vmatrix} \lambda_1+x & a+x & \dots & a+x \\ b+x & \lambda_2+x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+x \\ b+x & \dots & b+x & \lambda_n+x \end{vmatrix}$.

Montrer que Δ est une fonction affine, puis en déduire $\delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & a & \dots & a \\ b & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \lambda_n \end{vmatrix}$.

Exercice 8 [Calculs de déterminants par relations de récurrence]

Calculer les déterminant suivant (de taille $n \in \mathbb{N}^*$) en cherchant à établir une relation de récurrence :

1. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$

   (Indication : rajouter la dernière ligne/colonne à la première)

2. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$

   (Indication : retrancher la dernière ligne/colonne à la première)

3. $\begin{vmatrix} a & & 0 & & b \\ & \ddots & & \iddots & \\ 0 & & & & 0 \\ & \iddots & & \ddots & \\ b & & 0 & & a \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$

   (à exprimer à l'aide de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$) ;

5. $\begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$

Exercice 9 [Déterminant de Vandermonde]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{K}$. On leur associe la quantité :

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1. Montrer que $V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les x_i pour que l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1),\dots,P(x_n)) \end{array} \right.$$

   soit bijective.