Feuille d'exercices n^{o}25 : Intégration

Exercice 1 [Intégrale et point fixe]

Posons $g : x \mapsto f(x) - x$ qui est continue (par combinaison linéaire) et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \int_0^1 t\mathrm{d}t = 0$$

et on a donc deux cas :

— ou bien g est de signe constant : étant continue et d'intégrale nulle, elle est identiquement nulle donc tout $x \in [0;1]$, annulant g, est un point fixe de f ;

— ou bien elle change de signe : étant continue, par TVI elle s'annule, et son point d'annulation est un point fixe de f.

Exercice 2 [Intégrale et intégrale du carré]

On considère $g : x \mapsto f(x) - f(x)^2$. Par combinaison linéaire et composée, g est continue sur $[0;1]$. Par linéarité, on a également $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = 0$. Et comme f est à valeurs dans $[0;1]$, on déduit que g est positive, donc de signe constant.

Et ainsi g est identiquement nulle, donc :

$$\forall x \in [0;1],\ g(x) = f(x)(1 - f(x)) = 0 \text{ puis } f(x) = 0 \text{ ou } 1$$

mais f étant continue sur l'intervalle $[0;1]$, son image est un intervalle, donc $\{0\}$ ou $\{1\}$ (seuls intervalles inclus dans $\{0;1\}$.

Et finalement, f est constante de valeur 0 ou 1.

Exercice 3 [Première formule de la moyenne]

On applique le théorème des bornes atteintes à f : notons $\alpha, \beta \in [a;b]$ tels que :

$$\forall t \in [a;b],\ f(\alpha) \leqslant f(t) \leqslant f(\beta)$$

puis en multipliant par $g(t) \geqslant 0$:

$$\forall t \in [a;b],\ f(\alpha)g(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant f(\beta)g(t)$$

et en intégrant cette inégalité sur $[a;b]$:

$$f(\alpha)\left(\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant f(\beta)\left(\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\right).$$

et on a deux cas :

— si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$: alors tout $c \in [a;b]$ convient ;

— sinon : alors, par positivité de g, on a $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t > 0$ et en divisant par cette quantité :

$$f(\alpha) \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \leqslant f(\beta)$$

donc par théorème des valeurs intermédiaires le quotient d'intégrale est une image par f, donc de la forme $f(c)$, et un tel c convient en remultipliant par $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 4 [Deuxième formule de la moyenne]

On le fait avec g continue. On pose $G : x \mapsto \int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ (l'unique primitive de g qui s'annule en a), qui est de classe $\mathcal{C}^1$, comme f, et donc peut dont procéder par intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(b)G(b) - \int_a^b f'(t)G(t)\mathrm{d}t.$$

Par continuité de G sur le segment $[a;b]$, avec le théorème des bornes atteintes, il existe $\alpha, \beta \in [a;b]$ tels que :

$$\forall t \in [a;b],\ G(\alpha) \leqslant G(t) \leqslant G(\beta)$$

et en multipliant par $-f'(t) \geqslant 0$ (car f décroissante) et en intégrant sur $[a;b]$ l'inégalité obtenue, il vient :

$$G(\alpha)\left(f(a) - f(b)\right) \leqslant -\int_a^b f'(t)G(t)\mathrm{d}t \leqslant G(\beta)\left(f(a) - f(b)\right).$$

On déduit ensuite que :

$$G(\alpha)f(b) \leqslant G(b)f(b) \leqslant G(\beta)f(b).$$

Et en sommant ces deux inégalités, on déduit :

$$G(\alpha)f(a) \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant G(\beta)f(a)$$

et on a deux cas :

— si $f(a) = 0$: comme f est positive décroissante, alors f est identiquement nulle donc tout $c \in [a;b]$ convient ;

— sinon : alors $f(a) > 0$ et en divisant par $f(a)$ l'inégalité :

$$G(\alpha) \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{f(a)} \leqslant G(\beta)$$

et on conclut par TVI appliqué à G.

Si g est seulement continue par morceaux, la fonction G est encore continue et on peut quand même lui appliquer le TVI, le TBA, et faire l'intégration par parties du début (mais c'est plus compliqué à rédiger).

Exercice 5 [Intégrale d'une fonction dérivable]

On considère $g : x \mapsto f(x) - f(a)$. Par combinaison linéaire, g est continue. Et par linéarité de l'intégrale : $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$ (avec l'hypothèse de l'énoncé).

On a deux cas :

— si g est de signe constant : alors g est nulle, donc f est constante, et tout c convient ;

— sinon : alors g change de signe. Par TVI, g s'annule une fois sur $]a;b[$. Donc f prend au moins deux fois la valeur $f(a)$ (en a et en l'autre point d'annulation de g). Par théorème de Rolle, comme f est dérivable, on déduit que f a un point critique sur $]a;b[$.

Exercice 6 [Intégrale et fonctions puissances 1]

On considère f continue sur $[0,1]$ et on pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

1. La fonction f est continue sur le segment $[0;1]$: par théorème des bornes atteintes, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in [0;1],\ m \leqslant f(t) \leqslant M$$

et en multipliant par $t^n \geqslant 0$ et en intégrant entre 0 et 1 il vient :

$$\frac{m}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \frac{M}{n+1}$$

et donc I_n tend vers 0 par encadrement.

2. Le cas des fonctions continues se traite avec des ε. Traitons le cas d'une fonction $\mathcal{C}^1$.
Par intégrations par parties, on a :
$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}f(t)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}f'(t)}{n+1}\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\mathrm{d}t$$
où, par la première question (applicable comme f' est continue), la quantité $\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\mathrm{d}t$ tend vers 0. Et on a ainsi :
$$I_n = \frac{f(1)}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
Mais on a également :
$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
et en combinant ces deux égalités on a le développement asymptotique :
$$I_n = \frac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. Le cas des fonctions $\mathcal{C}^1$ se traite avec des ε. Traitons le cas d'une fonction $\mathcal{C}^2$.
Par intégrations par parties, on a :
$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}f(t)}{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}f'(t)}{n+1}\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\mathrm{d}t$$
et on applique le résultat précédent (valable comme f' est de classe $\mathcal{C}^2$) :
$$\int_0^1 t^{n+1}f'(t)\mathrm{d}t = \frac{f'(1)}{n+1} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{f'(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
avec la même manipulation qu'à la question précédente.
Et en réinjectant :
$$I_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{f'(1)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{f(1)}{n} - \frac{f(1)}{n(n+1)} - \frac{f'(1)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{f(1)}{n} + \frac{-f(1)-f'(1)}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 7 [Intégrale et fonctions puissances 2]

On va montrer un résultat plus fort : on montre que f possède au moins $n+1$ points d'annulation en lesquels elle change de signe, ou une infinité de points d'annulation.

Par linéarité, notons déjà que :
$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \int_a^b P(t)f(t)\mathrm{d}t.$$
Supposons que f ne s'annule en changeant de signe n fois au plus. Montrons alors que f s'annule une infinité de fois.

Considérons $x_1, \dots, x_m$ (pour $m \leqslant n$) ces points d'annulation. Notons $P = \prod_{i=1}^m (X - x_i) \in \mathbb{R}_m[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$. Alors :
$$\int_a^b P(t)f(t)\mathrm{d}t$$
mais les fonctions f et $t \mapsto P(t)$ ont les mêmes changements de signe : leur produit $g : t \mapsto P(t)f(t)$ est donc de signe constant. Comme f est continue (énoncé) et P aussi (fonction polynomiale), alors g est continue par produit. Donc g est identiquement nulle. Et ainsi :
$$\forall t \in [a;b],\ f(t)P(t) = 0 \text{ ie } (f(t) = 0 \text{ ou } P(t) = 0)$$
et ainsi, comme P ne s'annule en les x_i (qui sont déjà des points d'annulation de f), on déduit que : $f = 0$. Donc f s'annule une infinité de fois (elle est même identiquement nulle).

Exercice 8 [Intégrales et périodicité]

Posons F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Notons : $\varphi : x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t = F(x+T) - F(x)$. Par combinaison linéaire et composée, φ est dérivable, avec : $\varphi' : x \mapsto f(x+T) - f(x)$.

Et on a directement les équivalences :

$$\varphi \text{ constante} \Leftrightarrow \varphi' = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) - f(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ est } T\text{-périodique.}$$

Exercice 9 [Intégrale et majoration]

Posons F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0 et notons : $\varphi : x \mapsto e^{-kx}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = e^{-kx}F(x)$.

Par produit et composée, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée :

$$\varphi' : x \mapsto (f(x) - kF(x))\,e^{-kx} = \left(f(x) - k\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)e^{-kx} \leqslant 0$$

donc φ est décroissante.

Mais on a également :
- par construction de φ : $\varphi(0) = 0$;
- comme f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, alors F aussi (F est croissante et s'annule en 0, ou on peut aussi invoquer l'écriture de F par intégrale) ; et par produit φ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Et ainsi φ est nulle, donc F aussi, et en dérivant f est nulle.

Exercice 10 [Intégrale d'une fonction bijective]

1. Montrons déjà que $f(0) = 0$. Notons $f(0) = a$. Par l'absurde, supposons $a \neq 0$. Notons b l'antécédent de 0 par f. Par théorème des valeurs intermédiaires, $[0;a] \subset f([0;b])$. Et par théorème des bornes atteintes, $f([0;b]) = [0;A]$.

   Considérons c un antécédent de $A+1$ dans $\mathbb{R}_+$: nécessairement $c > b$. Et par théorème des valeurs intermédiaires appliqué à f entre b et c, il existe $d \in [b;c]$ tel que $f(d) = a$.

   Et finalement $f(d) = f(0)$, ce qui contredit la bijectivité de f.

   Notons F l'unique primitive de f sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0, et G l'unique primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0. Posons :

   $$\varphi : x \mapsto xf(x) - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = xf(x) - F(x) - G(f(x)).$$

   Alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ par produit, combinaison linéaire et composée, de dérivée :

   $$\varphi' : x \mapsto xf'(x) + f(x) - f(x) - f'(x)\cdot f^{-1}(f(x)) = 0$$

   donc φ est constante de valeur $\varphi(0) = \int_0^{f(0)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t = 0$ (comme $f(0) = 0$) ce qui prouve l'égalité pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $xf(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\mathrm{d}t$. On pourra commencer par montrer que $f(0) = 0$.

2. On fait un dessin : la première intégrale est l'aire sous la courbe de f^{-1} entre $f(0)$ et $f(x)$; la seconde est l'aire sous la courbe de f entre 0 et x. Par symétrie des courbes de f et f^{-1} par rapport à la première bissectrice, la première aire est égale à l'aire entre la courbe de f et la droite d'équation $y = f(x)$ entre les abscisses 0 et x. La somme de ces deux aires recouvrent donc le rectangle entre les abscisses 0 et x, et les ordonnées 0 et $f(x)$: son aire vaut $xf(x)$, ce qui donne l'égalité.

Exercice 11 [Fonction construite à partir d'une intégrale 1]

On note $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ (continue sur $\mathbb{R}$) et G une primitive de g sur $\mathbb{R}$ (existe bien par théorème fondamental de l'analyse). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ainsi :

$$F(x) = G(2x) - G(x)$$

donc F est dérivable (par combinaison linéaire et composée) de dérivée :

$$F' : x \mapsto 2g(2x) - g(x) = \frac{2}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^4+x^2+1}} = \frac{\sqrt{4x^4+4x^2+4} - \sqrt{16x^4+4x^2+1}}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

et donc :

$$F'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 4x^4+4x^2+4 \geqslant 16x^4+4x^2+1 \Leftrightarrow 3 \geqslant 12x^4 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

avec égalité seulement pour $x = \pm\sqrt{2}/2$.

Donc F est strictement décroissante sur $]-\infty; -\sqrt{2}/2]$ et sur $[\sqrt{2}/2; +\infty[$ et strictement croissante sur $[-\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2]$.

Pour les limites : pour $x > 0$, on a par décroissance de g sur $\mathbb{R}_+$:

$$\forall t \in [x, 2x],\ g(2x) \leqslant g(t) \leqslant g(x)$$

et en intégrant :

$$xg(2x) = \frac{x}{\sqrt{16x^4+4x^2+1}} \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

et on conclut par théorème d'encadrement que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

En $-\infty$, on peut faire le même calcul, ou invoquer que F est impaire (découle du fait que g est paire), et ainsi : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

Exercice 12 [Fonction construite à partir d'une intégrale 2]

Pour t au voisinage de 1, on a :

$$\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t\ln(t)} = \frac{t-1}{t\ln(t)} \underset{t\to1}{\sim} \frac{t-1}{1\cdot(t-1)} \underset{t\to1}{\sim} 1 \underset{t\to1}{\to} 1$$

Et donc la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \begin{cases} 1/\ln(x) - 1/x\ln(x) & \text{si} \quad x \neq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \end{cases}$$

est continue au voisinage de 1. Notons G une primitive de φ sur un voisinage de 1. Alors, pour x proche de 1, comme alors x^2 est également proche de 1, on a :

$$\int_x^{x^2} \varphi(t)\mathrm{d}t = G(x^2) - G(x)$$

qui tend vers 0 pour x tendant vers 1 (par continuité de G en 1).

Mais on a également :

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln(t)}\mathrm{d}t = \left[\ln\left(|\ln(t)|\right)\right]_x^{x^2} = \ln(2)$$

ce qui assure, par linéarité de l'intégrale, que : $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \ln(2)$.

Exercice 13 [Limite d'une somme]

On reconnaît le début du développement de Taylor de $f : x \mapsto \ln(1+x)$ en 1. Mais f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall k \in \mathbb{N},\ f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

et ainsi : $|f^{(n+1)}| \leqslant n!$ sur $\mathbb{R}_+$.

Par inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à f, à l'ordre n, entre 0 et 1 :

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \left| \ln(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| \leqslant \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$$

ce qui conclut par encadrement la limite voulue.

Exercice 14 [Méthode du point milieu]

On considère f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$, dont on souhaite calculer une valeur approchée de l'intégrale par la méthode dite des du point milieu : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on découpe $[a,b]$ en n segments réguliers, et on construit la fonction en escalier, pour laquelle la subdivision régulière est adaptée, et qui prend même valeur que f en les $a + (k + \frac{1}{2})\frac{b-a}{n}$ (pour $k \in [\![0; n-1]\!]$).

1. On a une subdivision à pas régulier : les écarts entre deux x_i consécutifs valent toujours $\frac{b-a}{n}$ et donc :
$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f\left(a + (k + \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\right).$$

2. Comme f est $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a;b]$, par théorème des bornes atteintes il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f'| \leqslant M$.

   On pose $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0; n]\!]$. Pour $k \in [\![0; n-1]\!]$, on pose $b_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Pour un tel k et $t \in [x_k; x_{k+1}]$, on a par inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à f à l'ordre 1 entre t et b_k :
$$|f(t) - f(b_k) - (t-b_k)f'(b_k)| \leqslant \frac{M|t-b_k|^2}{2} = \frac{M(t-b_k)^2}{2}.$$
   On note ensuite que tout $k \in [\![0; n-1]\!]$:
$$\frac{b-a}{n} f\left(a + (k + \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n} f(b_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(b_k)\mathrm{d}t = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(b_k) + (t-b_k)f'(b_k)\right)\mathrm{d}t$$
   en notant que, comme $b_k = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, on a : $\int_{x_k}^{x_{k+1}} (t-b_k)\mathrm{d}t = 0$.

   On réinjecte, avec la relation de Chasles :
$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - T_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n} f\left(a + (k + \frac{1}{2}\frac{b-a}{n}\right)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left(f(t) - f(b_k) - (t-b_k)f'(b_k)\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(b_k) - (t-b_k)f'(b_k)|\,\mathrm{d}t \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{M(t-b_k)^2}{2}\mathrm{d}t \text{ en intégrant l'inégalité de Taylor–Lagrange précédente} \\
&\leqslant M\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{(t-b_k)^3}{6}\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = M\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3}{24n^3} = \frac{M(b-a)^3}{24n^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$
   et on a bien le résultat demandé.

Exercice 15 [Sommes de Riemann]

On fait apparaître à chaque fois des sommes de Riemann :

1. $\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}$ qui tend vers $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t=$ $\mathrm{Arctan}(1)-\mathrm{Arctan}(0)=\frac{\pi}{4}$.
2. $\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k/n}{1+(k/n)^2}$ qui tend vers $\int_0^1\frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t=$ $\frac{1}{2}\ln(2)$.
3. $\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+4n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n^2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+2nk}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+2(k/n)}}$ qui tend vers $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+2t}}\mathrm{d}t=\sqrt{1+2}-\sqrt{1}=\sqrt{3}-1$.
4. $\frac{1}{n}\left(\cos(\pi/n)+\cos(2\pi/n)+\cdots+\cos(n\pi/n)\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos(k\pi/n)$ qui tend vers $\int_0^1\cos(\pi t)\mathrm{d}t=0$.
5. $\frac{1}{n}\left(\sin(\pi/n)+\sin(2\pi/n)+\cdots+\sin(n\pi/n)\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin(k\pi/n)$ qui tend vers $\int_0^1\sin(\pi t)\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}$
6. $\sqrt[n]{\left(1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{2}{n}\right)^2\right)\cdots\left(1+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)}=\exp(S_n)$ avec $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$ et S_n converge vers $\int_0^1\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$ qu'on calcule par intégration par parties :
$$\begin{aligned}\int_0^1\ln(1+t^2)\mathrm{d}t &= [t\ln(1+t^2)]_0^1-\int_0^1\frac{2t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t\\ &= \ln(2)-2+\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$
en faisant la décomposition en éléments simples $\frac{t^2}{1+t^2}=1-\frac{1}{1+t^2}$.
Et la quantité de départ tend vers $2\exp\left(-2+\frac{\pi}{2}\right)$.

Exercice 16 [Somme des puissances positives d'entiers]

On a directement :
$$S_n=n^\alpha\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha=n^{\alpha+1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\right)$$
où on reconnaît une somme de Riemann qui tend vers $\int_0^1 t^\alpha\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha+1}\neq 0$ ce qui donne l'équivalent :
$$S_n\sim\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Exercice 17 [Somme des puissances négatives d'entiers]

1. La suite (S_n) est strictement croissante : elle a donc une limite qui est soit finie (si, et seulement si, elle est majorée) soit $+\infty$ (sinon) par théorème de la limite monotone.

2. Soit $k \in [\![1;n]\!]$: la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est décroissante sur $[k;k+1]$, et ainsi :

$$\forall t \in [k, k+1],\ (k+1)^\alpha \leqslant t^\alpha \leqslant k^\alpha$$

et en intégrant sur $[k, k+1]$ on déduit :

$$(k+1)^\alpha = \int_k^{k+1} (k+1)^\alpha \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} t^\alpha \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} k^\alpha \mathrm{d}t = k^\alpha$$

et en sommant pour $k \in [\![1;n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^\alpha \leqslant \int_1^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^\alpha$$

et on distingue suivant la valeur de α.
Et on fait apparaître S_n :

$$S_{n+1} - 1 \leqslant \int_1^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t \leqslant S_n$$

qui donne l'encadrement :

$$\int_1^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t \leqslant S_n \leqslant 1 + \int_1^{n} t^\alpha \mathrm{d}t.$$

3. Si $\alpha = -1$: $\int_1^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t = \ln(n+1)$ qui tend vers $+\infty$, donc par minoration S_n tend vers $+\infty$.
Si $\alpha > -1$: on a $\int_1^{n+1} t^\alpha \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\alpha+1}\left[(n+1)^{\alpha+1} - 1\right]$ qui tend également vers $+\infty$, donc par minoration S_n tend vers $+\infty$.
Si $\alpha < -1$: on a $1 + \int_1^{n} t^\alpha \mathrm{d}t = 1 + \dfrac{1}{\alpha+1}\left[n^{\alpha+1} - 1\right] \leqslant 1$ et donc (S_n) converge (étant majorée).
Pour un équivalent, on procède par encadrement :
   - si $\alpha = -1$: on a l'encadrement :

   $$\ln(n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(n)$$

   où les membres de gauche et droite sont équivalents à $\ln(n)$, et par encadrement : $S_n \sim \ln(n)$;
   - $\alpha > -1$: on a l'encadrement :

   $$\frac{(n+1)^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1} \leqslant S_n \leqslant 1 + \frac{n^{\alpha+1} - 1}{\alpha+1}$$

   où les membres de gauche et droite sont équivalents à $\dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, et par encadrement : $S_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

Exercice 18 [Somme de Riemann et fonction dérivable]

On le fait de trois manières.
Avec des ε : soit $\varepsilon > 0$. Par dérivabilité de f en 0, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in]0, \eta],\ \left| \frac{f(x) - f(0)}{x} - f'(0) \right| = \left| \frac{f(x)}{x} - f'(0) \right| \leqslant \varepsilon$$

et pour n suffisamment grand tel que $\dfrac{1}{n} \leqslant \eta$, on aura pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ l'inégalité $\dfrac{1}{n+kp} \leqslant \eta$ et donc pour de tels k :

$$\left| f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \frac{1}{n+kp} f'(0) \right| \leqslant \varepsilon \frac{1}{n+kp}$$

et en sommant pour $k \in [\![1;n]\!]$ il vient :

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right) f'(0)\right| \leqslant \varepsilon \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right) \leqslant \varepsilon \frac{n+1}{n} \leqslant 2\varepsilon$$

Mais, en reconnaissant une somme de Riemann, la quantité $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right)$ tend vers :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+pt} = \frac{\ln(1+p)}{p}$$

et donc $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right) f'(0)$ tend vers $\frac{\ln(1+p)}{p} f'(0)$. Qui est donc la limite de la suite (u_n) par la majoration précédente.

En sommant des o : par dérivabilité en 0, on a :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} x f'(0) + \mathrm{o}(x)$$

et ainsi, comme tous les $\frac{1}{n+kp}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et sont, à n fixé et k quelconque, des $\mathrm{O}(1/n)$, on a par composition :

$$u_n \underset{n \to +\infty}{=} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{n+kp} f'(0) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n \to +\infty}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right) f'(0) + \mathrm{o}\,(1)$$

et on conclut comme précédemment.

Avec f de classe $\mathcal{C}^1$: pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on a par égalité des accroissements finis :

$$f\left(\frac{1}{n+kp}\right) = f\left(\frac{1}{n+kp}\right) - f(0) = \frac{1}{n+kp} \cdot f'(c_{n,k})$$

pour $c_{n,k} \in]0; \frac{1}{n+kp}[\subset [0, \frac{1}{n}]$. Mais f est $\mathcal{C}^1$, donc f' est continue sur le segment $[0; 1/n]$: par théorème des bornes atteintes, il existe $a_n, b_n \in [0; 1/n]$ tels que $f'([0, 1/n]) = [f'(a_n), f'(b_n)]$. Et ainsi :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp} f'(c_{n,k}) \in [v_n f'(a_n), v_n f'(b_n)]$$

où $v_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+kp}\right)$ tend vers $\frac{\ln(1+p)}{p}$. Mais par encadrement a_n et b_n tendent vers 0. Et par caractère $\mathcal{C}^1$ de f (en fait on n'utilise que la dérivabilité proche de 0, et la continuité de f' en 0) on déduit que $f'(a_n)$ et $f'(b_n)$ tendent vers $f'(0)$. Par produit, les quantités $v_n f'(a_n)$ et $v_n f'(a_n)$ tendent toutes les deux vers $\frac{\ln(1+p)}{p} f'(0)$. Et par encadrement, c'est aussi la limite de (u_n).

On pourrait faire aussi, comme la preuve de convergence des sommes de Riemann, pour f de classe $\mathcal{C}^2$, ou alors f de classe $\mathcal{C}^1$ avec f' lipschitzienne : les calculs ressemblent à la première méthode (on somme des inégalités, et on majore par inégalités triangulaire).