

Feuille d'exercices n°24 : Matrices et applications linéaires

Exercice 1 [Détermination de matrices d'applications linéaires]

Déterminer les matrices des applications suivantes dans les bases canoniques :

1. $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, y - 2x, y + 3z) \end{cases} ;$
2. $f_2 : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y - z, z - x) \end{cases} ;$
3. $f_3 : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \mapsto (P(1), P'(1)) \end{cases} ;$
4. $f_4 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \mapsto AM \end{cases} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ;$
5. $f_5 : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P(X + 1) - P(X) \end{cases} ;$
6. $f_6 : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ M \mapsto M + M^T \end{cases} .$

Exercice 2 [Matrice de Vandermonde]

On considère $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, et on définit l'application : $\varphi : \begin{cases} \mathbb{K}_{n-1}[X] \rightarrow \mathbb{K}^n \\ P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{cases} .$

1. En notant \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et \mathcal{C} celle de \mathbb{K}^n , donner $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi)$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les x_i pour qu'il existe \mathcal{B}' base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}}(\varphi) = I_n$ et donner alors \mathcal{B}' .

Exercice 3 [Calcul d'inverse d'une matrice]

On considère $n \in \mathbb{N}$, et on pose $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ définie par : $\forall i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ muni de sa base canonique.
2. En déduire que A est inversible, et donner son inverse.
3. En déduire que, pour tous $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ avec $i < j$ la valeur de : $\sum_{k=i}^j (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k}$.

Exercice 4 [Quelques calculs de rangs]

Déterminer les rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} ;$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} ;$
3. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} ;$
4. $\begin{pmatrix} 1 & i & -i & 1 \\ i & -i & 1 & 1 \\ 0 & 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix} .$

Exercice 5 [Rangs de matrices à paramètres]

Discuter suivant les valeurs des paramètres des rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix} ;$
2. $\begin{pmatrix} 1 & \cos(\theta) & \cos(2\theta) \\ \cos(\theta) & \cos(2\theta) & \cos(3\theta) \\ \cos(2\theta) & \cos(3\theta) & \cos(4\theta) \end{pmatrix} ;$
3. $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & b \\ b & 0 & a \end{pmatrix} .$

Exercice 6 [Matrices de rang 1]

Montrer que les matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang 1 sont exactement les matrices de la forme $X \cdot Y^T$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tous les deux non nuls. Une telle écriture est-elle unique ?

Exercice 7 [Changement de base pour un vecteur]

Soit $\mathcal{B}' = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1))$. Montrer que \mathcal{B}' est une base de \mathbb{R}^4 , calculer les matrices de passage entre \mathcal{B}' et la base canonique de \mathbb{R}^4 , et en déduire les coordonnées du vecteur $u = (20, 17, 10, 7)$ dans cette base.

Exercice 8 [Changement de base pour un endomorphisme 1]

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est :

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs $e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3, e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$ forment une base de \mathbb{R}^3 , et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 9 [Changement de base pour un endomorphisme 2]

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par : $f(x, y, z) = (2x + 2y + z, -2x - y, x + y - z)$.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

2. Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de passage d'une base \mathcal{B} à la base canonique, et donner la matrice de f dans \mathcal{B} .

3. En déduire $f \circ f \circ f$.

Exercice 10 [Changement de base pour un endomorphisme 3]

On considère $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ définie par : $f(x, y, z) = \int_0^2 \frac{xt^2 + yt + z}{(t+1)(t-3)} dt$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((0, 1, 1), (0, 1, -3), (1, -2, -3))$ est une base de \mathbb{R}^3 .

2. Montrer que f est linéaire, et déterminer l'image de \mathcal{B} par f .

3. En déduire une expression simple de $f(x, y, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 11 [Matrices semblables à une matrice nilpotente]

Montrer qu'une matrice est semblable à une matrice nilpotente si, et seulement si, elle est elle-même nilpotente.

Exercice 12 [Décomposition d'une matrice]

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et f

l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A .

1. Déterminer $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$, et montrer que ces espaces sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .

2. Donner une base adaptée à cette décomposition, et écrire la matrice de f dans cette base.

3. En déduire que f est la composée de deux endomorphismes usuels.

Exercice 13 [Endomorphisme nilpotent d'indice maximal]

On considère E espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n , c'est-à-dire que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ forme une base de E .

2. Déterminer la matrice de f dans cette base, ainsi que celles de f^2, \dots, f^{n-1} .

3. En déduire que les endomorphismes qui commutent avec f sont exactement les polynômes en f , c'est-à-dire que :

$$\{g \in \mathcal{L}(E) \mid g \circ f = f \circ g\} = \text{Vect}(\text{id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}).$$