Feuille d'exercices n^{o}23 : Formules de Taylor et développements limités

Exercice 1 [Manipulations de dl]

À l'aide des développements limités usuels, déterminer les développements limités des fonctions suivantes, en les points considérés et à l'ordre imposé :

1. $\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x}$ (ordre 2 en 0) ;
2. $\frac{\ln(x)}{x^2}$ (ordre 3 en 1) ;
3. $\sin(x)$ (ordre 4 en $\pi/4$) ;
4. $\tan(x) - \sin(x)$ (ordre 4 en 0) ;
5. $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$ (ordre 3 en 0) ;
6. $\cos(\ln(x))$ (ordre 3 en 1) ;
7. $\ln(1+e^x)$ (ordre 3 en 0) ;
8. $\ln(2+\sin(x))$ (ordre 3 en 0) ;
9. $\ln(e^x + \cos(x))$ (ordre 3 en 0) ;
10. $\sqrt{3+\cos(x)}$ (ordre 3 en 0) ;
11. $\ln(3e^x + e^{-x})$ (ordre 3 en 0) ;
12. $\sin(x)\tan(x)$ (ordre 3 en 0) ;
13. $\sqrt[3]{1+x}\sqrt{1-x}$ (ordre 3 en 0) ;
14. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ (ordre 4 en 0) ;
15. $e^{\sqrt{1+x}}$ (ordre 3 en 0) ;
16. $\ln(x)$ (ordre 4 en e) ;
17. e^x (ordre 4 en 2) ;
18. $\dfrac{1}{1+e^x}$ (ordre 3 en 0) ;
19. $\dfrac{x}{e^x-1}$ (ordre 2 en 0) ;
20. $(1-\cos(2x))(e^{-x}-1)(x-\sin(x))$ (ordre 7 en 0) ;
21. $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ (ordre 4 en 0^+).

Exercice 2 [Développement limité d'une réciproque 1]

Soit $f : x \mapsto xe^{x^2}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est bijective, et donner le dl 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 3 [Développement limité d'une réciproque 2]

Soit $f : x \mapsto \frac{e^x-1+2x}{3}$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est bijective, et donner le dl 3 en 0 de f^{-1}.

Exercice 4 [Ordre d'un développement limité 1]

Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 2$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que f admet des développements limités en 0 jusqu'à un ordre que l'on précisera.

Exercice 5 [Ordre d'un développement limité 2]

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-1/x^2} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Montrer que f admet des développements limités en 0 à tout ordre, et le donner. Interpréter ce résultat.

Exercice 6 [Application des développements limités aux matrices]

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'ordre k, c'est-à-dire que $N^k = 0$.

1. Justifier que la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ admet des dl à tout ordre en 0, et donner les coefficients de son dl 2. On notera $\sum_{i=0}^m a_i x^i + \mathrm{o}(x^m)$ le dl à l'ordre m.
2. Justifier que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $Q_m \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $1 + X = \left(\sum_{i=0}^m a_i X^i\right)^2 + X^{m+1} Q_m(X)$.
3. En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = I_n + N$, et donner A comme un polynôme en N.
4. Appliquer le résultat précédent pour trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Adapter la méthode précédente pour montrer que : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la matrice $I + N$ admet une racine m-ème, c'est-à-dire une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^m = I + N$.

Exercice 7 [Calculs de développements limités sans calculs]

En ne faisant pas trop de calculs, donner les développements limités suivants :

1. dl à l'ordre 65537 en 0 de $\ln\left(\sum_{k=0}^{65536} \frac{x^k}{k!}\right)$;
2. dl à l'ordre 21589 en 0 de $\exp\left(\sum_{k=1}^{21588} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right)$.

Exercice 8 [Calculs d'équivalents]

Déterminer un équivalent des fonctions suivantes en 0 :

1. $x(2+\cos(x)) - 3\sin(x)$;
2. $\mathrm{Arctan}(2x) - 2\mathrm{Arctan}(x)$;
3. $x^x - (\sin(x))^x$.

Exercice 9 [Calculs de limites]

À l'aide de développements limités, calculez les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$;
2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x}$;
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$;
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}$;
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$;
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$;
7. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}}$;
8. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{x^a - a^x}{\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(a)}$ (pour $a>0$).

Exercice 10 [Développement asymptotique d'une suite définie implicitement]

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n comme étant l'unique solution strictement positive de l'équation $x^5 + nx - 1 = 0$. Montrer que (u_n) converge, vers une limite que l'on déterminera, puis que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et enfin que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right)$.

Exercice 11 [Calculs de développements asymptotiques]

Déterminer les développements asymptotiques en $+\infty$ suivants :

1. $\sqrt{1+x}$ à la précision $x^{-3/2}$;
2. $x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x)$ à la précision x^{-2} ;
3. $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x$ à la précision x^{-2} ;
4. $\mathrm{Arctan}(x)$ à la précision x^{-3}.

Exercice 12 [Développement asymptotique et asymptote 1]

Soit $f : x \mapsto (x+1)e^{1/x}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donner le développement asymptotique de f en $+\infty$ à une précision de $\frac{1}{x}$. En déduire l'asymptote de f en $+\infty$ ainsi que sa position relative à celle-ci.

Exercice 13 [Développement asymptotique et asymptote 2]

Même chose avec $g : x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 14 [Études d'asymptotes]

Étudier les asymptotes éventuelles des fonctions suivantes aux bornes de leurs ensembles de définition :

1. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln(x)}$;
2. $g : x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x}$;
3. $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}\mathrm{Arctan}(x)$.