Feuille d'exercices n^{o}23 : Formules de Taylor et développements limités

Exercice 1 [Manipulations de dl]

1. $\sqrt{1+3x} - \sqrt[3]{1+2x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{5}{6}x - \dfrac{49}{72}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$;
2. $\frac{\ln(x)}{x^2} \underset{x\to 1}{=} (x-1) - \dfrac{5}{2}(x-1)^2 + \dfrac{13}{3}(x-1)^3 + \mathrm{o}((x-1)^3)$;
3. $\sin(x) = \sin(\pi/4 + (x-\pi/4)) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sin(x-\pi/4) + \cos(x-\pi/4)\right)$
$\underset{x\to\pi/4}{=} \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + (x-\pi/4) - \dfrac{(x-\pi/4)^2}{2} - \dfrac{(x-\pi/4)^3}{6} + \dfrac{(x-\pi/4)^4}{24}\right)$
$\underset{x\to\pi/4}{=} \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-\pi/4) - \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-\pi/4)^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{12}(x-\pi/4)^3 + \dfrac{\sqrt{2}}{48}(x-\pi/4)^4$
4. $\tan(x) - \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2}x^3 + \mathrm{o}(x^4)$;
5. $\ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) = \ln(1+x^2) - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} -x + \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
6. $\cos(\ln(x)) \underset{x\to 1}{=} 1 - \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{1}{2}(x-1)^3 + \mathrm{o}((x-1)^3)$;
7. $\ln(1+e^x) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$;
8. $\ln(2+\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{24}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
9. $\ln(e^x + \cos(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln(2) + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \dfrac{1}{8}x^3$;
10. $\sqrt{3+\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 2 - \dfrac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^3)$;
11. $\ln(3e^x + e^{-x}) \underset{x\to 0}{=} 2\ln(2) + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{8}x^2 - \dfrac{1}{8}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
12. $\sin(x)\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x^2 + \mathrm{o}(x^3)$ (faire avec équivalent et parité).
13. $\sqrt[3]{1+x}\sqrt{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{6}x - \dfrac{29}{72}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$;
14. $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x} \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{11}{6}x^3 - \dfrac{25}{12}x^4 + \mathrm{o}(x^4)$;
15. $e^{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} e + \dfrac{e}{2}x + \dfrac{e}{48}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$
16. $\ln(x) \underset{x\to e}{=} 1 + e^{-1}(x-e) - \dfrac{e^{-2}}{2}(x-e)^2 + \dfrac{e^{-3}}{3}(x-e)^3 - \dfrac{e^{-4}}{4}(x-e)^4 + \mathrm{o}((x-e)^4)$
17. $e^x = e^{2+(x-2)} \underset{x\to 2}{=} e^2 + e^2(x-2) + \dfrac{e^2}{2}(x-2)^2 + \dfrac{e^2}{6}(x-2)^3 + \dfrac{e^2}{24}(x-2)^4 + \mathrm{o}((x-2)^4)$;
18. $\dfrac{1}{1+e^x} \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{48}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$;
19. $\dfrac{x}{e^x - 1} \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$;
20. $(1-\cos(2x))(e^{-x}-1)(x-\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{1}{3}x^6 + \dfrac{1}{6}x^7 + \mathrm{o}(x^7)$ (il suffit de faire un dl à un terme pour $1-\cos(2x)$ et $x-\sin(x)$, et à deux termes pour $e^{-x}-1$ car tous les autres termes sont négligeables ;

21. $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0^+}{=} \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{16}x^3 + \mathrm{o}(x^4)$.

Exercice 2 [Développement limité d'une réciproque 1]

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit et composée) avec :

$$f' : x \mapsto (1+2x^2)e^{x^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, on déduit par théorème de la bijection monotone (f étant continue sur $\mathbb{R}$ par produit et composée) que f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Par produit et composée, la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$. Comme de plus f' ne s'annule jamais, alors f^{-1} est également $\mathcal{C}^\infty$, donc f et f^{-1} admettent des dl à tout ordre en tout point.

Comme $f(0)=0$, on déduit le dl5 en 0 de f^{-1} de celui de f. Comme f est impaire, alors f^{-1} aussi donc son dl5 en 0 est de la forme :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

On a par dl de l'exponentielle en 0 (et composition à droite et produit) :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^3 + \frac{1}{2}x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

et en utilisant que $f^{-1}\circ f = f\circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ on déduit :

— avec la première écriture :

$$x \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x^5) \underset{x\to 0}{=} af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + \mathrm{o}(f(x)^5) \underset{x\to 0}{=} ax + (a+b)x^3 + (a/2+3b+c)x^5 + \mathrm{o}(x^5)$$

et par unicité d'un dl on déduit :

$$a = 1,\ a+b = 0 \text{ et } a/2+3b+c = 0$$

donc :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

— avec la seconde écriture :

$$x \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x^5) \underset{x\to 0}{=} f^{-1}(x) + f^{-1}(x)^3 + \frac{1}{2}f^{-1}(x)^5 \underset{x\to 0}{=} ax + (a^3+b)x^3 + (a^5/2+3a^2b+c) + \mathrm{o}(x^5)$$

et par unicité d'un dl on déduire :

$$a = 1,\ a^3+b = 0 \text{ et } a^5/3+3a^2b+c = 0$$

et on retrouve comme ci-dessus :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^3 + \frac{5}{2}x^5 + \mathrm{o}(x^5).$$

Exercice 3 [Développement limité d'une réciproque 2]

Même méthode qu'avant : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (combinaison linéaire) avec :

$$f' : x \mapsto \frac{e^x+2}{3} > 0$$

donc f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (pas de FI sur les limites en $\pm\infty$).

Et f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec f' ne s'annulant jamais donc f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$: les fonctions f et f^{-1} admet des dl à tout ordre en tout point.

Comme $f(0) = 0$, le dl 3 en 0 de f^{-1} se déduit de celui de f, qui est :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{6}x^2\frac{1}{18}x^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

Ici on n'a pas de symétrie pour f^{-1}, donc on se contente de l'expression générale de son dl 3 en 0. Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, on peut déjà utiliser que $f^{-1}(0) = 0$ et $f^{-1\prime}(0) = 1$ donc ce dl est de la forme :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x + ax^2 + bx^3 + \mathrm{o}(x^3).$$

En utilisant que $f^{-1}(f(x)) = x \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x^3)$ et en composant les dl, on trouve :

$$x \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x^3) \underset{x\to 0}{=} x + (a + 1/6)x^2 + (a/3 + b + 1/18)x^3 + \mathrm{o}(x^3)$$

ce qui donne :

$$a + 1/6 = 0 = a/3 + b + 1/18$$

donc $a = -1/6$ et $b = 0$, c'est-à-dire :

$$f^{-1}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^2 + \mathrm{o}(x^3).$$

Exercice 4 [Ordre d'un développement limité 1]

On a déjà :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x^n) = \mathrm{o}(x^{n-1}) = 0 + \mathrm{o}(x^{n-1})$$

donc f admet un dl à l'ordre $(n-1)$ en 0.

Elle n'en admet pas à l'ordre n : par l'absurde, si c'était le cas, on aurait une écriture de la forme $f(x) \underset{x\to 0}{=} \alpha x^n + \mathrm{o}(x^n)$. Et donc $\dfrac{f(x)}{x^n} = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ aurait pour limite α en 0. Or cette quantité n'a pas de limite en 0. Contradiction.

Et ainsi, par troncature, f admet un dl à l'ordre k en 0 pour tous les $k \leqslant n-1$ (et c'est tout).

Exercice 5 [Ordre d'un développement limité 2]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{1}{x}e^{-1/x^2} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(1)$$

par croissances comparées. Donc f admet le dln : $f(x) = \mathrm{o}(x^n)$ en 0.

Et ceci est vrai pour tout n.

Donc f possède les mêmes dl que la fonction nulle en 0. Et pourtant f n'est pas la fonction nulle (ni au voisinage de 0 ni ailleurs). Donc, plusieurs fonctions peuvent avoir les mêmes dl à tout ordre sans pour autant être égales.

Exercice 6 [Application des développements limités aux matrices]

Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente d'ordre k, c'est-à-dire que $N^k = 0$.

1. La fonction $x \mapsto x + 1$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc au voisinage de 0, et envoie 0 sur 1.
   La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc au voisinage de 1.
   Par composée, la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 : elle admet donc, par formule de Taylor–Young, des dl à tout ordre en 0.
   Pour l'ordre 2, on obtient l'expression :

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

2. On a déjà par définition du dlm précédent :

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \mathrm{o}(x^m)$$

et en mettant au carré :

$$1+x \underset{x\to 0}{=} \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i + \mathrm{o}(x^m)\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i x^i\right)^2 + \mathrm{o}(x^m)$$

en développant.
Posons alors $P_m = (1+X) - \left(\sum_{i=0}^{m} a_i X^i\right)^2$, qui est un polynôme. Par propriété des polynômes en 0, il est équivalent à son monôme de plus petit degré en 0. Mais par le point précédent on a également : $P_m(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^m)$. Et donc le monôme de plus petit degré de P_m est de de degré au moins $m+1$. C'est-à-dire que P_m est divisible par X^{m+1}. Et on conclut en écrivant Q_m le quotient de P_m par X^{m+1} (qui vérifie bien les propriétés demandées).
3. En évaluant l'égalité précédente en N, et en prenant $m = k-1$ on a :

$$I_n + N = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i N^i\right)^2 + N^k Q_k(N) = A^2$$

en posant $A = \sum_{i=0}^{k-1} a_i N^i$, et en notant que $N^k = 0$ donc $N^k Q_k(N) = 0$. Et ce A convient bien.
4. On a ici $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui vérifie $N^3 = 0$ donc $k = 3$ convient. Il suffit d'utiliser le dl2 calculé au début, et on trouve :

$$A = I_3 + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(et on vérifie que l'on a bien la bonne matrice pour A^2 bien sûr).
5. On écrit le dl en 0 de $x \mapsto \sqrt[m]{1+x}$ à l'ordre $k-1$, qui donne une écriture :

$$\sqrt[m]{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \mathrm{o}(x^k)$$

qu'on réécrit en passant à la puissance m :

$$1 + X = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i\right)^m + X^k Q(X)$$

pour Q un polynôme. Et en évaluant en N il vient :

$$I_n + N = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i N^i\right)^*$$

et donc $A = \sum_{i=0}^{k-1} a_i N^i$ convient.

Exercice 7 [Calculs de développements limités sans calculs]

1. On reconnaît le dl de $\exp(x)$ au voisinage de 0 :

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{65536} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{65537}}{65537!} + \mathrm{o}(x^{65537})$$

puis en composant avec ln :

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{65536} \frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(e^x - \frac{x^{65537}}{65537!} + \mathrm{o}(x^{65537})\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{x^{65537}}{65537!}e^{-x} + \mathrm{o}(x^{65537})e^{-x}\right)$$

mais comme $e^x = 1 + \mathrm{o}(1)$ en 0, on déduit que $-\dfrac{x^{65537}}{65537!}e^{-x} + \mathrm{o}(x^{65537})e^{-x} \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^{65537}}{65537!} + \mathrm{o}(x^{65537})$ et finalement :

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{65536} \frac{x^k}{k!}\right) \underset{x\to 0}{=} x + \ln\left(1 - \frac{x^{65537}}{65537!} + \mathrm{o}(x^{65537})\right) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^{65537}}{65537!} + \mathrm{o}(x^{65537}).$$

2. On reconnaît le dl de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{21588} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + \frac{1}{21589} x^{21589} + \mathrm{o}(x^{21589})$$

et on trouve comme ci-dessus :

$$\exp\left(\sum_{k=1}^{21588} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k\right) \underset{x\to 0}{=} \exp(\ln(1+x))\exp\left(-\frac{1}{21589}x^{21589} + \mathrm{o}(x^{21589})\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} (1+x)\left(1 - \frac{1}{21589}x^{21589} + \mathrm{o}(x^{21589})\right) = 1 + x - \frac{1}{21589}x^{21589} + \mathrm{o}(x^{21589}).$$

Exercice 8 [Calculs d'équivalents]

On fait des dl jusqu'au premier ordre non nul :

1. on fait le dl4 de cos et le dl5 de sin en 0 : $x(2+\cos(x)) - 3\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{60}x^5$.
2. on fait le dl3 de Arctan : $\mathrm{Arctan}(2x) - 2\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2x^3$.
3. on a pour $x \to 0^+$:

$$x^x - (\sin(x))^x = x^x\left(1 - \exp\left(x\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)\right)\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} -x^x \cdot x\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

et on utilise $\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) = \ln\left(1 - \dfrac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{6}$ et que $x^x \underset{x\to 0}{\sim} 1$ (limite finie non nulle) et donc :

$$x^x - (\sin(x))^x \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{x^3}{6}.$$

Exercice 9 [Calculs de limites]

On fait des dl jusqu'au premier ordre non nul (pour avoir un équivalent) ou alors à un o(1) près (ce qui permet d'avoir la limite). On compose les limites si besoin :

1. $\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \exp\left(\dfrac{\ln(\sin(x)/x)}{1-\cos(x)}\right)$ et avec les dl2 de cos et dl3 de sin en 0 :

$$\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(1-\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}(x^2)\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{6}$$

$$1-\cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

le quotient dans l'exponentielle tend donc vers $\dfrac{-1/6}{1/2} = -\dfrac{1}{3}$ et finalement :

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos(x)}} = \exp(-1/3).$$

2. $\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x} = \exp\left(x^3\ln(1+1/x^2)-x\right)$ et avec le dl2 de ln en 1 on trouve :

$$\ln(1+1/x^2) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

et en réinjectant :

$$\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^3} e^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x-\frac{1}{2x}-x+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(-\frac{1}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{\to} 1.$$

3. $\dfrac{1}{\sin^2(x)}-\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{\sin^2(x)}\left(1-\dfrac{\sin^2(x)}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{\sin^2(x)}\left(1-\left(1-\dfrac{x^2}{6}+\mathrm{o}(x^2)\right)^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}\dfrac{x^2}{3} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{3}$
et donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2(x)}-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$;

4. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(1+x)} = \dfrac{1}{\ln(1+x)}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}-1\right) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{1}{\ln(1+x)}\left(1-\dfrac{x}{2}-1+\mathrm{o}(x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{-x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{2}$
et donc : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)} = -\frac{1}{2}$;

5. $\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = \exp\left(x\ln(x)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\right)$ et par dl1 de ln :

$$\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)} = 1+\frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1/x+\mathrm{o}(1/x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{=} 1+\frac{1}{x\ln(x)}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)$$

et en injectant dans le ln :

$$x\ln(x)\cdot\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x\ln(x)}{x\ln(x)} = 1$$

et en injectant cette limite dans l'exponentielle : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = e$;

6. Par dl de ln en 1 on a :

$$(1+x)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \underset{x\to 0}{=} \exp\left(1-\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right) \underset{x\to 0}{=} e\cdot\exp\left(-\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right) \underset{x\to 0}{=} e\left(1-\frac{x}{2}+\mathrm{o}(x)\right) \underset{x\to 0}{=} e-$$

et en réinjectant :
$$\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{-ex/2}{x} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{e}{2}$$
et donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x} = -\dfrac{e}{2}$;

On pouvait faire par taux d'accroissements, en reconnaissant le taux en 0 de $x \mapsto (1+x)^{1/x} = \exp\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)$, qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (par composée), prolongeable par continuité en 0 (limite classique) et dérivable en 0 (par limite de la dérivée, car sa dérivée est $x \mapsto \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$ dont on détermine la limite (qui vaut $-1/2$) en 0 par le dl2 de ln.

7. On fait le dl1 de a^x au voisinage de 2, qui est donné en posant $x = 2+h$ par :
$$a^x = \exp(x\ln(a)) = \exp((2+h)\ln(a)) = a^2 \cdot \exp(h\ln(a)) \underset{h\to 0}{=} a^2 \cdot (1 + h\ln(a) + \mathrm{o}(h))$$
et en réinjectant, on obtient (toujours avec $x = 2+h$) :
$$\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}} \underset{h\to 0}{=} \frac{13+(4\ln(2)+9\ln(3))h+\mathrm{o}(h)}{13+(8\ln(2)+(5/2)\ln(5))h+\mathrm{o}(h)} \underset{h\to 0}{=} 1+\frac{4\ln(2)+9\ln(3)-8\ln(2)-(5/2)\ln(5)}{13}h+\mathrm{o}(h)$$
et on pose $\alpha = \dfrac{4\ln(2)+9\ln(3)-8\ln(2)-(5/2)\ln(5)}{13} = \dfrac{1}{13}\ln\left(\dfrac{3^9\cdot\sqrt{5}}{2^4 5^3}\right)$ pour simplifier.

Et alors :
$$\left(\frac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}} \underset{h\to 0}{=} \exp\left(\frac{\ln(1+\alpha h+\mathrm{o}(h))}{-h}\right) \underset{h\to 0}{\to} \exp(-\alpha)$$
et donc : $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{2^x+3^x}{2^{x+1}+5^{x/2}}\right)^{\frac{1}{2-x}} = \exp(-\alpha) = \left(\dfrac{3^9\cdot\sqrt{5}}{2^4 5^3}\right)^{1/13}$;

8. On regarde séparément numérateur et dénominateur. On pose $x = a+h$:
— $x^a - a^x = \exp(a\ln(a+h)) - \exp((a+h)\ln(a)) \underset{x\to a}{=} \exp(a\ln(a)+h+\mathrm{o}(h)) - \exp(a\ln(a)+h\ln(a))$
$\underset{x\to a}{=} a^a\left(\exp(h+\mathrm{o}(h)) - \exp(h\ln(a))\right) = a^a\left(1+h-1-h\ln(a)+\mathrm{o}(h)\right) \underset{x\to a}{\sim} a^a(1-\ln(a))h$
— $\mathrm{Arctan}(x) - \mathrm{Arctan}(a) \underset{x\to a}{=} \mathrm{Arctan}'(a)\cdot h + \mathrm{o}(h) \underset{x\to a}{\sim} \dfrac{h}{1+a^2}$

Et en réinjectant :
$$\frac{x^a-a^x}{\mathrm{Arctan}(x)-\mathrm{Arctan}(a)} \underset{x\to a}{\sim} (1+a^2)a^a(1-\ln(a)).$$
Et donc : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^a-a^x}{\mathrm{Arctan}(x)-\mathrm{Arctan}(a)} = (1+a^2)a^a(1-\ln(a))$.

Exercice 10 [Développement asymptotique d'une suite définie implicitement]

On a une suite implicite : on reprend la méthode habituelle.

On pose $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$). La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (somme de x^5, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et de $x \mapsto nx-1$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car affine de pente $n > 0$). De plus, par calcul direct, f_n tend vers $-\infty$ et $+\infty$ respectivement en ∞ et $+\infty$. Enfin, f_n est continue (polynôme).

Par théorème de la bijection monotone, f_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En particulier, 0 possède un unique antécédent par f_n.

Comme $f_n(0) = -1 < 0$, cet antécédent est strictement positif.

Ceci assure bien que (u_n) est bien défini.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1 = u_n^5 + nu_n - 1 + u_n = f_n(u_n) + u_n = u_n > 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$$

et par stricte croissance de f_{n+1} on déduit que $u_n > u_{n+1}$.

Comme ceci est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

Étant minorée (par 0 par construction), elle converge par limite monotone vers $\ell \geqslant 0$.

Par l'absurde, supposons que $\ell > 0$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 = f_n(u_n) = u_n^5 + nu_n - 1$$

où par continuité de $x \mapsto x^5$, u_n^5 tend vers $\ell^5 > 0$, et par opérations sur les limites nu_n tend vers $+\infty$ (pas de FI comme $\ell > 0$). Et finalement : $0 = f_n(u_n)$ tend vers $+\infty$. Contradiction.

Donc $\ell = 0$.

On réinjecte dans l'expression de $f_n(u_n)$ en notant que, comme u_n tend vers 0, alors u_n^5 aussi. On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1 - u_n^5}{n} = \frac{1 + \mathrm{o}(1)}{n} \sim \frac{1}{n}$$

ce qui donne le premier équivalent.

On peut donc écrire $u_n = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$. En réinjectant à nouveau il vient :

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^5}{n} = \frac{1 - \frac{1}{n^5}\left(1 + \mathrm{o}\left(1\right)\right)^5}{n} = \frac{1 - \frac{1}{n^5} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^6}\right)$$

qui est le développement asymptotique demandé.

Exercice 11 [Calculs de développements asymptotiques]

On se ramène à chaque fois en des points connus en factorisant par un équivalent (ou pas ?).

1. $\sqrt{1+x} = \sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{8x^{3/2}} + \mathrm{o}(x^{-3/2})$;
2. $x\ln(1+x) - (x+1)\ln(x) = x\ln(x) + x\ln(1+1/x) - x\ln(x) - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \mathrm{o}(x^{-3})\right) - \ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} -\ln(x) + 1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \mathrm{o}(x^{-2})$;
3. $\left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \exp\left(x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right) = \exp\left(x\ln(1+1/x)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \exp\left(x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + \mathrm{o}(x^{-3})\right)\right) = \exp\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \mathrm{o}(x^{-2})\right) \underset{x\to+\infty}{=} e\cdot\exp\left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + \mathrm{o}(x^{-2})\right) \underset{x\to+\infty}{=} e\cdot\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} + \mathrm{o}(x^{-2})\right) \underset{x\to+\infty}{=} e - \frac{e}{2x} + \frac{11}{24ex^2} + \mathrm{o}(x^{-2})$;
4. On utilise que, pour $x > 0$: $\mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(1/x) = \pi/2$. Et donc :

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(1/x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \mathrm{o}(x^{-3})$$

Exercice 12 [Développement asymptotique et asymptote 1]

On a par dl2 de l'exponentielle en 0 :

$$f(x) = (x+1)e^{1/x} \underset{x\to+\infty}{=} (x+1)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \mathrm{o}(x^{-2})\right) \underset{x\to+\infty}{=} x + 2 + \frac{3}{2x} + \mathrm{o}(1/x)$$

et ainsi la droite d'équation $y = x+2$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$, et comme $f(x) - (x+2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x} > 0$ on déduit que la courbe de f est au-dessus de son asymptote.

Exercice 13 [Développement asymptotique et asymptote 2]

Même méthode :

$$g(x) = x\ln\left(2+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\ln(2)+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^2}+\mathrm{o}(x^{-2})\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\ln(2)+\frac{1}{2}-\frac{1}{8x}+\mathrm{o}(x^{-1})$$

et ainsi la droite d'équation $y = \ln(2)x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe de g en $+\infty$, et comme $g(x) - (\ln(2)x + \dfrac{1}{2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{8x} > 0$ on déduit que la courbe de g est en-dessous de son asymptote.

Exercice 14 [Études d'asymptotes]

On commence à chaque fois par déterminer les ensembles de définition.

1. $f : x \mapsto \dfrac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln(x)}$:
   $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$ donc on étudie en 0, en 1 et en $+\infty$:
   — en 0 : pas de FI et $f(x) \underset{x\to 0}{\to} 0$ donc pas d'asymptote ;
   — en 1 : pas de FI et $f(x) \underset{x\to 1^-}{\to} -\infty$ et $f(x) \underset{x\to 1^+}{\to} +\infty$ donc une asymptote verticale en 1 (à gauche et à droite) ;
   — en $+\infty$: on utilise que :
   $$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} = 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \frac{1}{x\ln(x)} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x\ln(x)}\right)$$
   et en réinjectant :
   $$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x + 1 + \frac{1}{\ln(x)} + \mathrm{o}(1/\ln(x))$$
   ce qui donne l'asymptote d'équation $y = x+1$, et la courbe de f est au-dessus de son asymptote.
2. $g : x \mapsto \dfrac{x^2+2x}{|x-1|+x}$:
   $D_g = \mathbb{R}$ (on distingue suivant que $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 1$ pour voir que le dénominateur est toujours non nul) donc on étudie en $\pm\infty$:
   — en $+\infty$: pour $x \geqslant 1$:
   $$g(x) = \frac{x^2+2x}{2x-1} = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} + \frac{5/4}{2x-1}$$
   par réduction en éléments simples. Et donc la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{4}$ est asymptote à la courbe de g en $+\infty$, et g est au dessus de son asymptote en $+\infty$;
   — en $-\infty$: pour $x \leqslant 1$:
   $$g(x) = x^2 + 2x$$
   qui n'a pas d'asymptote en $-\infty$ (par croissances comparées)
3. $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{x+1}\mathrm{Arctan}(x)$:
   $D_h = \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$ donc on étudie en -1 et en $\pm\infty$:
   — en -1 : pas de FI et $h(x) \underset{x\to 1^-}{\to} +\infty$ et $h(x) \underset{x\to 1^+}{\to} -\infty$ donc une asymptote verticale en -1 (à gauche et à droite) ;
   — en $+\infty$: on utilise que, pour $x > 0$: $\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + \mathrm{o}(x^{-3})$ et en réinjectant :
   $$h(x) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}x + \left(-\frac{\pi}{2}-1\right) + \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{1}{x} + \mathrm{o}(x^{-1})$$
   et donc la droite d'équation $y = \dfrac{\pi}{2}x + \left(-\dfrac{\pi}{2}-1\right)$ est asymptote à la courbe de h en $+\infty$, et la courbe de h est au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

— en $-\infty$: on utilise que, pour $x<0$: $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to-\infty}{=} -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} + \mathrm{o}(x^{-3})$ et en réinjectant :

$$h(x) \underset{x\to-\infty}{=} -\frac{\pi}{2}x + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \left(-\frac{\pi}{2} + 1\right)\frac{1}{x} + \mathrm{o}(x^{-1})$$

et donc la droite d'équation $y = -\dfrac{\pi}{2}x + \left(\dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ est asymptote à la courbe de h en $-\infty$, et la courbe de h est au-dessus de son asymptote en $-\infty$.