Feuille d'exercices n^{o}21 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 [Espaces de matrices]

1. Les matrices triangulaires supérieures : dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et base $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$
2. Les matrices triangulaires supérieures strictes : dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et base $(E_{i,j})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$.
3. Les matrices de diagonales nulles : dimension n^2-n et base $(E_{i,j})_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}$
4. Les matrices diagonales : dimension n et base $(E_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$
5. Les matrices scalaires : dimension 1 et base (I_n).
6. Les matrices symétriques : dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et base $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$
7. Les matrices antisymétriques : dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$ et base $(E_{i,j}-E_{j,i})_{1\leqslant i<j\leqslant n}$.

Exercice 2 [Divisibilité dans les polynômes et sev]

Pour $P\in\mathbb{K}_n[X]$, c'est un élément de F si, et seulement si, il est de la forme AU avec $U\in\mathbb{K}[X]$. Par considération sur le degré, un tel U est nécessairement de degré au plus $n-p$. Et finalement :

$$F=\{AU\,|\,U\in\mathbb{K}_{n-p}[X]\}=\varphi(\mathbb{K}_{n-p}[X])$$

mais comme $A\neq 0$ on déduit que φ est injective. Et $\dim(\mathbb{K}_{n-p}[X])=n-p+1$ donc par théorème du rang on déduit : $\dim(F)=n-p+1$. Et une base est l'image d'une base de $\mathbb{K}_{n-p}[X]$ par φ, donc par exemple avec la base canonique on déduit que la famille $\left(X^k\cdot A\right)_{0\leqslant k\leqslant n-p}$ est une base de F.

Par division euclidienne, un supplémentaire de F est $\mathbb{K}_{p-1}[X]$.

Exercice 3 [Polynôme annulateur]

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n, et $f\in\mathcal{L}(E)$.

1. L'espace $\mathcal{L}(E)$ est de dimension n^2 donc $m=n^2$ convient : la famille $(\mathrm{id}_E,f,f^2,\dots,f^m)$ alors de cardinal $(m+1)>\dim(\mathcal{L}(E))$ donc est nécessairement liée.
2. Comme la famille est liée, il existe $\lambda_0,\dots,\lambda_m$ non tous nuls tels que : $\sum_{i=0}^m\lambda_i f^i=0$. Le polynôme $P=\sum_{i=0}^m\lambda_i X^i$ convient.
3. On travaille avec $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, qui est un espace de dimension n^2 : le même m convient, et les mêmes calculs sont applicables.

Exercice 4 [Intersection de deux hyperplans]

Comme H_1 et H_2 sont des hyperplans, on a deux situations : ou ils sont confondus, et alors $H_1+H_2=H_1=H_2$ est de dimension $n-1$; ou bien ils sont distincts, et alors $H_1+H_2=E$ est de dimension n.

Par formule de Grassmann, on a également :

$$\dim(H_1\cap H_2)=\dim(H_1)+\dim(H_2)-\dim(H_1+H_2)=2(n-1)-\dim(H_1+H_2)$$

et on déduit l'équivalence.

Exercice 5 [Intersection avec un hyperplan]

Comme F n'est pas inclus dans H, alors $F+H=E$. Par formule de Grassmann :

$$\dim(F\cap H)=\dim(F)+\dim(H)-\dim(F+H)=\dim(F)+(n-1)-n=\dim(F)-1.$$

Exercice 6 [Rangs d'applications linéaires]

On détermine à chaque fois l'image de la base canonique, dont on extrait un base en retirant des vecteurs combinaisons linéaires des autres :

1. $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a+b+c=0\}$ et $\mathrm{Ker}f = \{(x,y,z) \,|\, x=y=z\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Le rang est 2.
2. $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a-2b+c=0\}$ et $\mathrm{Ker}f = \{(0,0)\}$. Le rang est 2.
3. $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}\right) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 3a+b=0\} = \{(\lambda, -3\lambda) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ et $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \{(a,b) \in \mathbb{R}^3 \,|\, a=b\} = \{(\lambda,\lambda) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ Le rang est 1.
4. On passe par les réels : si $a,b \in \mathbb{R}$, alors :
$$f(a+ib) = (a+ib) + i(a-ib) = (a+b) + i(a+b) = (a+b)(1+i)$$
et donc $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}((1+i)) = \{\lambda(1+i) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) \equiv \pi/4[\pi]\}$ et $\mathrm{Ker}f = \{a+ib \,|\, a+b = 0\} = \{(a-ia) \,|\, a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(1-i) = \{\lambda(1-i) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \arg(z) \equiv -\pi/4[\pi]\}$ Le rang est 1.
5. fait en cours : $\mathrm{Im}f = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}$ et $\mathrm{Ker}f = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$. Le rang est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
6. Pour $k \in \mathbb{N}$:
$$f(X^k) = X - (X+1) \cdot k \cdot X^{k-1} = (1-k)X^k - kX^{k-1}$$
puis : $\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(1, -1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2, -3X^4 - 4X^3) = \mathrm{Vect}(1, -X^2 - 2X, -2X^3 - 3X^2, -3X^4 - 4X^3)$ et on a bien une base (famille échelonnée) et $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}(X+1)$. Le rang est 4.

Exercice 7 [Application sur les polynômes et polynômes interpolateurs de Lagrange]

L'application φ est linéaire entre deux espaces de même dimension finie n : il suffit de montrer son injectivité pour avoir la bijectivité, ce que l'on fait par le noyau.

Si $P \in \mathrm{Ker}\varphi$, alors : $P(x_1) = \cdots = P(x_n) = 0$, donc tous les x_i sont racines de P, et $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, donc P est de degré au plus $n-1$. Donc P a plus de racines (les x_i étant distincts) que son degré, donc $P = 0$.

Et ainsi : $\mathrm{Ker}\varphi = 0$: φ est donc injective, donc surjective.

Cela veut dire que, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, alors il existe un unique polynôme de degré au plus $n-1$ tel que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $P(x_i) = a_i$. On retrouve un résultat plus général que celui déjà vu pour $n = 2$: par deux points, il passe une unique droite (étant données deux valeurs en deux points distincts, il existe une unique fonction affine qui réalise ces valeurs).

On a directement $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$ ce qui donne le premier résultat.

Cela permet de trouver les antécédents : la famille P_i est donc une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, et pour $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a directement :
$$P = \sum_{i=1}^{n} P(x_i) P_i$$
c'est-à-dire que les coordonnées de P dans la base des P_i sont les valeurs de P en les x_i.

Exercice 8 [Inclusion d'une image]

Par théorème du rang appliqué à $g = f|_V$ qui est une application linéaire de V dans E :

$$\dim(V) = \mathrm{rg}(g) + \dim\mathrm{Ker} g = \dim(g(V)) + \dim\mathrm{Ker}(g)$$

et comme $V \subset f(V) = g(V)$, on déduit que $\dim\mathrm{Ker} g = 0$, puis $\dim V = \dim(g(V)) = \dim(f(V))$ donc $f(V) = V$.

C'est faux en dimension infinie : on prend $\varphi : P \mapsto P'$ sur $\mathbb{K}[X]$. Avec $V = \{XP \mid P \in \mathbb{K}[X]\} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\}$ on a bien $V \subset \varphi(V)$ (comme $\varphi(V) = \mathbb{K}[X]$) mais $V \neq \mathbb{K}[X]$ donc $f(V) \neq V$.

Exercice 9 [Application injective]

Par double implication :

— si f est injective : alors $\mathrm{Ker} f = \{0\}$. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ famille de vecteurs de E. Posons $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$. On a : $\mathrm{Vect}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = f(V)$ qui est de dimension $\mathrm{rg}(f(x_1), \dots, f(x_n))$. De plus, on a : $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n) = \dim(V)$. Et par théorème du rang appliqué à $g = f|_V$, qui est également injective car son noyau est inclus dans celui de f dont réduit à $\{0\}$:

$$\dim(V) = \dim(f(V)) + \dim\mathrm{Ker} g = \dim(f(V))$$

ce qui donne bien : $\mathrm{rg}(f(x_1), \dots, f(x_n)) = \mathrm{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

— réciproquement : supposons la propriété vérifiée et montrons que f est injective. Étudions pour cela son noyau. Soit $x \in \mathrm{Ker} f$. Alors :

$$0 = \mathrm{rg}(0) = \mathrm{rg}(f(x)) = \mathrm{rg}(x)$$

donc $x = 0$. Donc $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ (l'autre inclusion découle de la linéarité). Et donc f est injective.

Exercice 10 [Endomorphisme nilpotent]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose f nilpotent.

   (a) On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in E$ vérifient que : $f^m(x) \neq 0$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{m-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^i(x) = 0$.
   Comme f est nilpotent, alors la suite $(f^k(x))$ est stationnaire à 0. Notons $N \in \mathbb{N}$ (avec donc $N > m$) le plus petit tel que $f^N(x) = 0$ (c'est-à-dire que $f^k(x) = 0$ pour tout $k \geqslant N$ et $f^{N-1}(x) \neq 0$).
   En appliquant f^{N-1} à l'égalité précédente, il vient :

   $$0 = f^{N-1}(0) = \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i f^{N-1+i}(x) = \lambda_0 f^{N-1}(x)$$

   et, comme $f^{N-1}(x) \neq 0$, on déduit $\lambda_0 = 0$.
   En réinjectant et en appliquant f^{N-2}, il vient :

   $$0 = f^{N-2}(0) = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i f^{N-2+i}(x) = \lambda_1 f^{N-1}(x)$$

   et, comme $f^{N-1}(x) \neq 0$, on déduit $\lambda_1 = 0$.
   On répète le processus en réinjectant les valeurs des λ_i nulles, et en appliquant f^{N-k} pour $k \leqslant m$ on trouve $\lambda_0 = \cdots = \lambda_{m-1} = 0$.
   Donc la famille est libre.

   (b) Comme, dans un espace de dimension n, toute famille libre est de cardinal au plus n, on déduit que $m \leqslant n$. Donc tout $x \in E$ vérifie $f^n(x) = 0$. Donc $f^n = 0$.

(c) Comme $f^n = 0$, alors directement $p \leqslant n$.

2. Il suffit de montrer qu'il existe un m (indépendant de x) tel que $f^m(x) = 0$. Mais avec le point précédent $m = n$ convient : sinon, cela voudrait dire que, pour un certain x, le vecteur $f^n(x)$ est non nul alors que $f^m(x) = 0$, et la même preuve que ci-dessus montre que la famille $(x, f(x), \dots, f^n(x))$ est libre, ce qui est impossible comme son cardinal est $n + 1 > \dim(E)$.

   Donc finalement : $f^n(x) = 0$ pour tout x. Donc $f^n = 0$. Donc f est nilpotent.

   Résultat faux avec par exemple la dérivation sur $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 11 [Projecteurs complémentaires]

Par théorème du rang appliqué à f et g, on a :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim E = \mathrm{rg}(f) + \dim \mathrm{Ker}(f) = \dim \mathrm{Ker}(g) + \mathrm{rg}(g)$$

ce qui assure déjà que $\dim \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{rg}(g) = \dim \mathrm{Im} g$ (et pareil en inversant f et g). Par argument de dimension finie, il suffit de montrer une inclusion dans chaque égalité à montrer.

Montrons que $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Im} g$: soit $x \in \mathrm{Ker} f$. Alors $f(x) = 0$. Puis :

$$x = \mathrm{Id}(x) = (f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) \in \mathrm{Im} g$$

ce qui prouve l'inclusion.

Par dimension et échange des rôles de f et g, on a donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$.

Reste à montrer que f est g sont des projecteurs. Comme $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} g$ et $\mathrm{Im} f = \mathrm{Ker} g$, on déduit que $\mathrm{Im} g \subset \mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f \subset \mathrm{Ker} g$ donc $g \circ f = f \circ g = 0$. Et ainsi :

$$f^2 = f \circ (\mathrm{Id} - g) = f - f \circ g = f \text{ et } g^2 = g \circ (\mathrm{Id} - f) = g - g \circ f = g$$

ce qui prouve bien que f et g sont des projecteurs.

Exercice 12 [Image et noyau supplémentaires]

On a les implications/inclusions suivantes (toujours vraies peu importe la dimension) :

$$(i) \Rightarrow (ii), \ \mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f \text{ et } \mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker} f^2$$

ce qui assure déjà (stricte croissance de la dimension) les équivalences :

$$(iii) \Leftrightarrow (iv) \text{ et } (v) \Leftrightarrow (vi)$$

L'équivalence $(i) \Leftrightarrow (ii)$ se déduit du théorème du rang.

Reste à montrer que les trois colonnes sont équivalentes : on a déjà vu (feuille 18) les équivalences : $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$ et $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$ ce qui permet de conclure.

On pouvait aussi montrer que toutes les assertions sont équivalentes à $\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$. Ou utiliser le théorème du rang pour avoir l'équivalence entre les résultats sur les images et ceux sur les noyaux.

Exercice 13 [Rang et composée]

On considère $H = \mathrm{Ker} f$ (qui est un hyperplan) et $u \notin H$ de sorte que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(u)$.

On pose $v = f(u) \neq 0$: on a alors $\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(v)$.

Alors $f(v) = f^2(u) \in \mathrm{Im} f$ donc est de la forme λv pour $\lambda \in \mathbb{K}$. Ce λ convient car pour $x \in E$, en écrivant $x = y + \mu u$ pour $y \in \mathrm{Ker} f$ on a :

$$\lambda f(x) = \lambda \mu v = \mu f(v) = \mu f^2(u) == f^2(\mu u) = f^2(x)$$

donc $\lambda f = f^2$.

Exercice 14 [Un polynôme annulateur]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f \circ f = 3f - 2\mathrm{id}_E$.

1. Soit $y \in \mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E)$: notons $x \in E$ tel que $y = (f - \mathrm{id}_E)(x) = f(x) - x$. Alors :

   $$(f - 2\mathrm{id}_E)(y) = (f - 2\mathrm{id}_E)(f(x) - x) = f^2(x) - f(x) - 2f(x) + 2x = 3f(x) - 2x - f(x) - 2f(x) + 2x = 0$$

   donc $y \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$.

   Et même méthode pour l'autre inclusion.

2. On peut montrer que la somme est directe (clair avec l'intersection) et que les dimensions correspondent avec un théorème du rang appliqué à $(f - \mathrm{id})$ en notant que l'inclusion précédente assure que $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$.

   Autre méthode : par analyse–synthèse, on montre que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément $y \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ et $z \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id})$, et plus précisément qu'alors $y = 2x - f(x)$ et $z = f(x) - x$.

Exercice 15 [Rang d'une composée 1]

On montre les inégalités $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$:

— par théorème du rang appliqué à $\varphi = g|_{\mathrm{Im} f}$, qui vérifie $\mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(g \circ f)$ on a la première inégalité ;

— par l'inclusion $\mathrm{Im} g \circ f \subset \mathrm{Im} g$: on a la seconde inclusion en passant à la dimension.

Exercice 16 [Rang d'une composée 2]

On utilise que le rang d'une composée est inférieur au rang de chaque application qui la compose. Et ainsi :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}((f \circ g) \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$$
$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f \circ (g \circ f)) \leqslant \mathrm{rg}(f \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(f)$$
$$\mathrm{rg}(g) = \mathrm{rg}((g \circ f) \circ g) \leqslant \mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \mathrm{rg}(g)$$

et donc toutes les inégalités ci-dessus sont des égalités, et on a les égalités voulues sur les rangs.

Exercice 17 [Rang d'une somme]

On a directement l'inclusion $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$: si $y \in \mathrm{Im}(f+g)$, notons x tel que $y = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$ qui est bien un élément de $\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g$.

Et en passant aux dimensions, il vient :

$$\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \dim(\mathrm{Im} f + \mathrm{Im} g) \leqslant \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g).$$

Pour l'autre inégalité, on applique la précédente :

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f + g - g) \leqslant \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(-g) = \mathrm{rg}(f+g) + \mathrm{rg}(g)$$

ce qui donne : $\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g) \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$.

En échangeant les rôles de f et g on déduit également : $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(f) \leqslant \mathrm{rg}(f+g)$.

Et les deux inégalités donnent l'inégalité demandée avec les valeurs absolues.

Pour le cas d'égalité, il suffit de prendre $g = 0$ et on a alors des égalités de chaque côté.