Feuille d'exercices n^{o}21 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercice 1 [Espaces de matrices]

Donner les dimensions ainsi qu'une base des sous-espaces vectoriels suivants de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

1. Les matrices triangulaires supérieures.
2. Les matrices triangulaires supérieures strictes.
3. Les matrices de diagonales nulles.
4. Les matrices diagonales.
5. Les matrices scalaires.
6. Les matrices symétriques.
7. Les matrices antisymétriques.

Exercice 2 [Divisibilité dans les polynômes et sev]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{K}_n[X]$ non nul, dont on note p le degré. En étudiant l'application $\varphi : P \mapsto PA$, Montrer que $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X] \,|\, A|P\}$ est un sev de $\mathbb{K}_n[X]$, et en donner la dimension, une base, ainsi qu'un supplémentaire.

Exercice 3 [Polynôme annulateur]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n, et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ qu'on donnera explicitement tel que $(\mathrm{id}_E, f, f^2, \ldots, f^m)$ est liée.
2. En déduire qu'il existe un polynôme P non nul tel que $P(f) = 0$.
3. Montrer que le résultat précédent reste valable si on remplace f par $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 4 [Intersection de deux hyperplans]

Soient H_1, H_2 deux hyperplans d'un espace E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $H_1 \neq H_2$ si, et seulement si, $\dim H_1 \cap H_2 = n - 2$.

Exercice 5 [Intersection avec un hyperplan]

Soit H un hyperplan de d'un espace E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout sev F de E non inclus dans H on a : $\dim F \cap H = \dim F - 1$.

Exercice 6 [Rangs d'applications linéaires]

Déterminer le rang des applications linéaires suivantes, et donner une base de l'image et du noyau dans chaque cas :

1. $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (y - z, z - x, x - y)$;
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x + y, x, x - y)$;
3. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x - y, -3x + 3y)$;
4. $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + i\overline{z}$ (où $\mathbb{C}$ est traité comme $\mathbb{R}$-ev) ;
5. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M + M^T$;
6. $\mathbb{R}_4[X] \to \mathbb{R}_4[X],\ P \mapsto P - (X + 1)P'$.

Exercice 7 [Application sur les polynômes et polynômes interpolateurs de Lagrange]

On considère $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ deux-à-deux distincts, et on s'intéresse à l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \to & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array} \right.$$

Montrer que φ est bijective, et interpréter ce résultat.

On pose pour tout $i \in [\![1; n]\!]$: $P_i = \displaystyle\prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$. Montrer que l'image par φ de la famille $(P_1, \ldots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 8 [Inclusion d'une image]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$, et V un sev de E tel que $V \subset f(V)$. Montrer que $f(V) = V$.

Le résultat est-il vrai si E est supposé de dimension infinie ?

Exercice 9 [Application injective]

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que f est injective si, et seulement si, pour tout famille $(x_1,\ldots,x_n)$ de vecteurs de E on a :

$$\mathrm{rg}(f(x_1),\ldots,f(x_n)) = \mathrm{rg}(x_1,\ldots,x_n).$$

Exercice 10 [Endomorphisme nilpotent]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose f nilpotent.
   (a) On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in E$ vérifient que : $f^m(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, f(x),\ldots,f^{m-1}(x))$ est libre.
   (b) En déduire que $f^n = 0$.
   (c) En déduire que l'indice de nilpotence de f (le plus petit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0$) est au plus n.
2. On suppose que : pour tout $x \in E$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m(x) = 0$ (avec m qui dépend a priori de x). Montrer que f est nilpotent, mais que le résultat devient faux si E n'est pas de dimension finie.

Exercice 11 [Projecteurs complémentaires]

Soit E de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$f + g = \mathrm{Id} \text{ et } \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \mathrm{dim}E.$$

Montrer que f et g sont des projecteurs complémentaires (c'est-à-dire tels que $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Im}g$ et $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}g$).

Exercice 12 [Image et noyau supplémentaires]

Soit E de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $E = \mathrm{Im}f \oplus \mathrm{Ker}f$;
(ii) $E = \mathrm{Im}f + \mathrm{Ker}f$;
(iii) $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$;
(iv) $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$;
(v) $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$;
(vi) $\mathrm{dimKer}f = \mathrm{dimKer}f^2$.

Exercice 13 [Rang et composée]

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f^2 = \lambda f$.

Exercice 14 [Un polynôme annulateur]

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $f \circ f = 3f - 2\mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$ et que $\mathrm{Im}(f - 2\mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{id}_E)$.

Exercice 15 [Rang d'une composée 1]

Soient f, g deux applications linéaires composables de rangs finis. Montrer que $g \circ f$ est de rang fini, avec $\mathrm{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.

Exercice 16 [Rang d'une composée 2]

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimensions finies, et $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(F,E)$ telles que : $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

Montrer que f, g, $f \circ g$ et $g \circ f$ ont même rang.

Exercice 17 [Rang d'une somme]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ de rangs finis. Montrer que :

$$|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$$

et que ces inégalités ne peuvent être améliorées (dans le sens où on peut trouver f, g qui réalisent les égalités extrêmes).