Feuille d'exercices n^{o}20 : Polynômes

Exercice 1 [Équations en les polynômes]

1. $P \circ P = P$: si P solution : $\deg(P \circ P) = \deg(P)^2 = \deg(P)$ donc $\deg(P) \leqslant 1$. On pose $P = aX + b$, et alors :

$$P \circ P = P \Leftrightarrow a(aX+b)+b = aX+b \Leftrightarrow a(a-1)X+ab = 0 \Leftrightarrow a(a-1) = ab = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} & a = 0 \\ \text{ou} & a = 1 \text{ et } b = 0 \end{array} \right.$$

donc les solutions sont X et les polynômes constants.

2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$: si P est solution : $\deg(P(X^2)) = 2\deg(P) = \deg((X^2+1)P) = 2 + \deg(P)$ donc $P = 0$ ou $\deg(P) = 2$. Réciproquement :
   - $P = 0$ est solution ;
   - si $P = aX^2 + bX + c$, alors :

$$P \text{ solution} \Leftrightarrow aX^4+bX^2+c = (X^2+1)(aX^2+bX+c) = aX^4+bX^3+(a+c)X^2+bX+c \Leftrightarrow b = a+c = 0 \Leftrightarrow P$$

Donc les solutions sont les polynômes de la forme $a(X^2-1)$ pour $a \in \mathbb{K}$.

Exercice 2 [Valeurs d'un polynôme sur $\mathbb{U}$]

On considère $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, et on pose $M = \sup_{|z|=1} |P(z)|$.

1. On a directement une somme géométrique de raison ω^{j-k} :
   - si $k = j$: la raison est 1 et les termes valent tous 1 donc $\sum_{l=0}^n \left(\omega^{j-k}\right)^l = \sum_{l=0}^n 1 = n+1$;
   - sinon : la raison est différente de 1 et par formule générale d'une somme géométrique :

$$\sum_{l=0}^{n} \left(\omega^{j-k}\right)^l = \frac{\omega^{(n+1)(j-k)} - 1}{\omega^{(j-k)} - 1} = 0.$$

On remplace :

$$P(1)+\omega^{-k}P(\omega)+\cdots+\omega^{-nk}P(\omega^n) = \sum_{l=0}^{n} \omega^{-lk}P(\omega^l) = \sum_{l=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_j\omega^{-lk}\omega^{lj} = \sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{l=0}^{n} \left(\omega^{j-k}\right)^l\right) = (n+1)a_k$$

avec le résultat précédent.

2. Par inégalité triangulaire, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$|a_k| = \frac{|P(1) + \omega^{-k}P(\omega) + \cdots + \omega^{-nk}P(\omega^n)|}{n+1} \leqslant \frac{|P(1)| + |P(\omega)| + \cdots + |P(\omega^n)|}{n+1} \leqslant \frac{(n+1)M}{n+1} = M$$

en utilisant que $|\omega^{-ik}| = 1$ et $|P(\omega^i)| \leqslant M$ (par définition de M et en utilisant que $\omega^{-ik}, \omega^i \in \mathbb{U}$).

Exercice 3 [Une suite de polynômes]

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $P_n = a_n + b_nX + c_nX^2 + X^3Q_n$ (termes de degré plus que 2 ensuite qu'on regroupe dans $Q_n \in \mathbb{R}[X]$) puis :

$$P_{n+1} = P_n^2 - 2 = \left(a_n + b_nX + c_nX^2 + X^3Q_n\right)^2 - 2 = (a_n^2-2)+(2a_nb_n)X+(b_n^2+2a_nc_n)X^2+\big(2a_nQ_n + 2b_nc_n + c_n^2X$$

ce qui définit les suites $(a_n), (b_n), (c_n)$ par :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\{ \begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n^2 - 2 \\ b_{n+1} & = & 2a_nb_n \\ c_{n+1} & = & b_n^2 + 2a_nc_n \end{array} \right.$$

et on aurait aussi $Q_{n+1} = 2a_nQ_n + 2b_nc_n + c_n^2X + 2b_nQ_nX + 2c_nQ_nX^2 + Q_n^2X^3$ mais ce n'est pas utile.

On déduit :

— (a_n) est constante de valeur -1 : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = -1$;
— en réinjectant : (b_n) est géométrique de raison -2 : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = (-2)^{n-1}$;
— en réinjectant : $c_{n+1} = 4^{n-1} - 2c_n$ puis :

$$\frac{c_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{2}\frac{c_n}{4^n}$$

et $l = \frac{1}{16} - l/2 \Leftrightarrow l = \frac{1}{24}$ puis $\frac{c_n}{4^n} - \frac{1}{24} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}\left(\frac{c_1}{4^1} - \frac{1}{24}\right) = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ et finalement : $c_n = \dfrac{2^{n-2}}{3}\left(2^{n-1} + (-1)^n\right)$.

Exercice 4 [Équations en des polynômes et leurs dérivées]

1. $P'^2 = 4P$: si P est solution, ou bien P est constant (et il vaut 0), ou bien son degré vérifie $2(\deg(P) - 1) = \deg(P)$ donc $\deg(P) = 2$.
   Réciproquement : $P = 0$ est solution. Considérons $P = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. Alors :

$$P \text{ solution} \Leftrightarrow (2aX + b)^2 = 4(aX^2 + bX + c) \Leftrightarrow 4a^2X^2 + 4abX + b^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & a^2 \\ ab & = & b \\ b^2 & = & 4c \end{array}\right. \Leftrightarrow P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$$

   donc les solutions sont 0 et les polynômes de la forme $X^2 + bX + \dfrac{b^2}{4}$ $(b \in \mathbb{K})$.
2. $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$: si $P \neq 0$ est solution, en notant a_nX^n (pour $n \in \mathbb{N}$ et $a_n \neq 0$) le monôme dominant de P, alors $n(n-1)a_nX^n$ est celui de $(X^2+1)P''$ et $6a_nX^n$ est celui de $6P$. On doit donc avoir $n(n-1) = 6$, donc $n = 3$.
   Réciproquement, $P = 0$ est solution. Considérons $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$. ALors :

$$P \text{ solution} \Leftrightarrow 0 = (X^2+1)P'' - 6P = 6aX^3 + 2bX^2 + 6aX + 2b - 6aX^3 - 6bX^2 - 6cX - 6d = -4bX^2 + 6(a-c)X +$$

   donc les solutions sont les polynômes de la forme $aX^3 + aX$ pour $a \in \mathbb{K}$ (le cas $a = 0$ redonne 0).

Exercice 5 [Taylor à l'envers]

Par formule de Taylor en 0, on a :

$$P(X) = \sum_{n=0}^{\deg(\mathrm{P})} \frac{P^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

et de même en remplaçant P par ses dérivées, ce qui donne en évaluant en 1, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$P^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n+k)}(0)}{n!}$$

puis par formule de Taylor en 1 :

$$P(X+1) = \sum_{k=0}^{\deg(\mathrm{P})} \frac{P^{(k)}(1)}{n!} X^k = \sum_{k=0}^{\deg(P)} \left(\sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n+k)}(0)}{k!n!}\right) X^k = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \left(\sum_{k=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(n+k)}(0)}{k!n!} X^k\right) = \sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$$

Exercice 6 [Parité de polynômes]

On dit qu'il polynôme est **pair** (resp. **impair**) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

1. Pour $P = \sum a_k X^k$, on a $P(-X) = \sum (-1)^k a_k X^k$ et donc :

$$P \text{ pair } \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_k = (-1)^k a_k \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0$$

   ce qui donne la première équivalence. La seconde vient du fait que, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $a_k = \dfrac{P^{(k)}(0)}{k!}$ (par formule de Taylor par exemple).

2. Pour les polynômes impairs, on a :

$$P \text{ impair } \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(2k)}(0) = 0.$$

3. Posons $Q = P(X) - P(-X)$:
   — si P est pair : $Q = 0$, donc $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) = P(-k)$;
   — réciproquement, si $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) = P(-k)$: alors Q possède une infinité de racines (tous les entiers), donc $Q = 0$, donc P est pair.

   Le résultat pour les polynômes impairs se montre de même en posant $Q = P(X) + P(-X)$.
   C'est faux pour une fonction : prenons $f : x \mapsto \sin(\pi x)$, qui s'annule en tous les entiers, et vérifie donc bien $\forall k \in \mathbb{N},\ f(k) = f(-k)$ (ces quantités valent 0). Mais f n'est pas paire car $f(-1/2) = -1 \neq 1 = f(1/2)$. Et on pourrait multiplier f par une fonction quelconque et avoir le même problème.

Exercice 7 [Divisibilités de polynômes]

On pose la division euclidienne à chaque fois comme on souhaite les quotients. Si on voulait seulement la divisibilité, comme on veut une divisibilité par un polynôme de la forme $X - a$, il suffit de vérifier que $P(a) = 0$ (ce qui est plus rapide).

1. $\dfrac{X^3 - 2X^2 + 3X - 2}{X - 1} = X^2 - X + 2$;
2. $\dfrac{X^3 - 3X^2 + 3X - 2}{X - 2} = X^2 - X + 1$;
3. $\dfrac{X^3 + 3X^2 - 2}{X + 1} = X^2 + 2X - 2$.

Exercice 8 [Quelques divisibilités]

1. On écrit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ de sorte que :

$$P(P(X)) - P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k (P(X)^k - X^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k (P(X)^k - X^k)$$

   et, par factorisation, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $P(X)^k - X^k = (P(X) - X) \left(\sum_{i=0}^{k-1} P(X)^i X^{k-1-i} \right)$ qui est donc divisible par $P(X) - X$.
   Par somme, $P(P(X)) - P(X)$ est divisible par $P(X) - X$.
2. Et finalement $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$ et aussi $P(X) - X$, donc il divise leur somme, donc $P(P(X)) - X$.
3. On montre par récurrence que $P(X) - X$ divise $Q_{l+1}(X) - Q_l(X)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$:
   — initialisation : déjà fait avant pour $l = 1$ (et trivial pour $l = 0$) ;
   — hérédité : on fixe $l \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(X) - X$ divise $Q_{l+1}(X) - Q_l(X)$. Montrons que $P(X) - X$ divise $Q_{l+2}(X) - Q_{l+1}(X)$. Par définition :

$$Q_{l+2}(X) - Q_{l+1}(X) = P(Q_{l+1}(X)) - P(Q_l(X)) = \sum_{k=1}^{n} a_k \left(Q_{l+1}(X)^k - Q_l(X)^k \right)$$

   où chaque terme est divisible par $Q_{l+1}(K) - Q_l(X)$. Donc par $P(X) - X$. D'où l'hérédité.

D'où la récurrence.

Et on déduit le résultat par telescopage comme : $Q_l(X) - X = \sum_{k=0}^{l-1} Q_{k+1}(X) - Q_k(X)$.

Exercice 9 [Divisibilité, division et racines]

1. On pose $P = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Alors $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$ donc 1 est racine (au moins) triple, donc $(X-1)^3$ divise P. Et au passage $P'''(1) = n(n+1)(n+2) \neq 0$ (comme $n \in \mathbb{N}^*$) donc 1 est racine triple de P.
2. On pose $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$: $P(1) = n - (n+1) - 1 = 0$ donc 1 est racine.
   Puis $P' = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$ donc $P'(1) = 0$ donc 1 est racine au moins double.
   Puis $P'' = n^2(n+1)X^{n-1} - (n-1)n(n+1)X^{n-2}$ donc $P''(1) = n(n+1) \neq 0$ donc 1 est exactement racine double.
3. On pose $R_n \in \mathbb{R}_1[X]$ ce reste (comme $\deg((X+1)(X-2) = 2)$. On a alors :$X^n(X+1)^2 = Q_n(X+1)(X-2) + a_nX + b_n$ pour $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ le quotient et $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. On évalue en -1 et en 2 :
   $$0 = 0 - a_n + b_n \text{ et } 9 \cdot 2^n = 2a_n + b_n$$
   donc $a_n = b_n = 3 \cdot 2^n$ puis $R_n = 3 \cdot 2^n(X+1)$.
4. On factorise : $2X^3 - 3X^2 + X = X(X-1)(2X-1)$ donc $P = (X-1)^n - X^n + 2X - 1$ est divisible par $2X^3 - 3X^2 + X$ si, et seulement si, $P(1) = P(0) = P(1/2) = 0$. Et on a :
   $$P(1) = 0,\ P(0) = (-1)^n - 1 \text{ et } P(1/2) = (-1/2)^n - (1/2)^n$$
   donc $P(0) = 0 \Leftrightarrow n$ pair $\Rightarrow P(1/2) = 0$ et $P(0) = 0$. Donc on a la divisibilité demandée si, et seulement si, n est pair.

Exercice 10 [Unicité de la division euclidienne]

Ce reste est de la forme $R \in \mathbb{R}_1[X]$, donc on peut l'écrire $R = a + bX$. On évalue en i la division euclidienne, ce qui donne :

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = e^{int} = \cos(nt) + i\sin(nt) = a + ib$$

donc $R = \cos(nt) + X\sin(nt)$.

Pour le cas général, on trouve de même comme reste : $\cos(a_1 + \cdots + a_n) + \sin(a_1 + \cdots + a_n)X$.

Exercice 11 [Divisibilité dans les entiers et les polynômes]

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. On écrit $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$ et alors :
   $$X^a = X^a - X^r + X^r = X^r(X^{bq} - 1) + X^r$$
   où $X^{bq} - 1 = (X^b - 1)(\sum_{k=0}^{q-1} X^{bk})$ est un multiple de $X^b - 1$: on a donc écrit la division euclidienne de X^a par $X^b - 1$. Le reste est donc X^r.
2. On écrit $a = bq + r$ (division euclidienne). En reprenant les calculs ci-dessus, le reste de la division euclidienne de $X^a - 1$ par $X^b - 1$ est $X^r - 1$. Et donc :
   $$X^b - 1 | X^a - 1 \Leftrightarrow X^r - 1 = 0 \Leftrightarrow r = 0 \Leftrightarrow b|a$$
   ce qui est l'équivalence demandée.

Exercice 12 [Équation en des polynômes à l'aide de racines]

1. $P(X^2) = P(X)P(X+1)$: si P est constant, alors $P = P^2$ donc $P = 1$ ou $P = 0$. Et sinon on note $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine de P, qu'on réinjecte :

   $$P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha+1) = 0 \text{ et } P((\alpha-1)^2) = P(\alpha-1)P(\alpha) = 0$$

   donc α^2 et $(\alpha-1)^2$ sont également racines de P. Mais alors :
   - nécessairement, α est de module 1 ou 0 : sinon la suite $(u_n) = (\alpha^{2^n})$ est une suite de racines deux à deux distinctes de P, et P a une infinité de racines, donc $P = 0$;
   - mais $\alpha - 1$ vérifie la même condition, donc est également de module 0 ou 1.

   ce qui laisse seulement quatre possibilités pour α : 0, 1 et $e^{\pm i\pi/3}$. Mais alors α^2 et $(\alpha-1)^2$ doivent être de cette forme aussi, ce qui laisse seulement 0 et 1 comme racines. Comme ce sont les seules racines de P, on déduit que P est de la forme : $P(X) = X^a(X-1)^b$, pour $a, b \in \mathbb{N}$. Et un tel polynôme vérifie :

   $$P(X^2) = X^{2a}(X-1)^b(X+1)^b \text{ et } P(X)P(X+1) = X^a(X-1)^b(X+1)^a X^b$$

   donc est solution si, et seulement si, $a = b$.
   Et finalement les solution sont le polynôme nul et les polynômes de la forme $P = X^a(X-1)^a$, $a \in \mathbb{N}$.
2. $P(X^2) = P(X)P(X-1)$: même méthode : 0 et 1 sont les solutions constantes ; et sinon, si α est racine de P solution, alors α^2 et $(\alpha+1)^2$ aussi ce qui impose α et $\alpha+1$ de module 0 ou 1. Puis $\alpha \in \{0, -1, e^{\pm 2i\pi/3}\}$. Mais il faut aussi que α^2 et $(\alpha+1)^2$ soient dans cet ensemble, ce qui interdit 0 et 1. Donc P est de la forme $P = (X - e^{2i\pi/3})^a(X - e^{-2i\pi/3})^b$ pour $a, b \in \mathbb{N}$. Et un tel polynôme vérifie :

   $$P(X^2) = (X - e^{-2i\pi/3})^a(X + e^{-2i\pi/3})^a(X - e^{2i\pi/3})^b(X + e^{2i\pi/3})^b \text{ et } P(X)P(X+1) = (X - e^{2i\pi/3})^a(X - e^{-2i\pi/3})^b$$

   en utilisant que $\left(e^{2i\pi/3}\right)^2 = e^{-2i\pi/3}$ (et pareil en changeant les signes) et $e^{2i\pi/3} + 1 = -e^{-2i\pi/3}$. Et à nouveau P est solution si, et seulement si, $a = b$.
   Et finalement les solution sont le polynôme nul et les polynômes de la forme $P = (X - e^{2i\pi/3})^a(X - e^{-2i\pi/3})^a$, $a \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 [Suite de polynômes définie implicitement]

1. On procède par analyse–synthèse !
   - analyse : considérons un tel P_n : comme $\deg(P_n - P_n') = \deg(P_n)$ (les degrés étant différents), on déduit que P_n doit être de degré n. Écrivons alors $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Alors $P_n - P_n' = \sum_{k=0}^n a_k X^k - \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \left(\sum_{k=0}^{n-1}(a_k - (k+1)a_{k+1})X^k\right) + a_n X^n$ et donc les a_k vérifient :

     $$\forall k \in [\![0; n-1]\!],\ a_k = (k+1)a_{k+1} \text{ et } a_n = \frac{1}{n!}$$

     et une récurrence donne alors : $\forall k \in [\![0; n]\!],\ a_k = \dfrac{1}{k!}$.

     Et donc $P_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{X^k}{k!}$. D'où l'unicité.
   - synthèse : un tel P_n convient.

   D'où l'existence et l'unicité, avec $P_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{X^k}{k!}$.
2. Si P_n possédait une racine double, ce serait une racine de P_n et de P_n', donc de $\dfrac{X^n}{n!}$: et la seule racine multiple possible est donc 0. Mais 0 n'est pas racine de P_n car $P_n(0) = 1 \neq 0$. Donc toutes les racines de P_n sont simples.

3. Par écriture de P_n, on déduit :

$$P_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1}.$$

Par récurrence, montrons que P_n possède une racine réelle si n est impair, et aucune si n est pair :
— pour $n = 0$: $P_0 = 1$ n'a pas de racine (réelle) ;
— soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que P_n possède une ou aucune racine réelle suivant que n est impair ou pair. Alors :
  — si n est pair : $P_{n+1}' = P_n$ ne possède aucune racine, donc est de signe constant ; donc la fonction $\widetilde{P_{n+1}}$ est strictement monotone (même strictement croissante comme tous ses coefficients sont positifs) donc admet au plus un point d'annulation ; comme c'est une fonction polynomiale de degré impair, elle s'annule une fois (limites de $\pm\infty$ en $\pm\infty$ et TVI). Donc elle s'annule une fois.Donc P_{n+1} possède une unique racine réelle ;
  — si n est impair : $P_{n+1}' = P_n$ s'annule une fois, et comme c'est un polynôme de degré impair, on déduit que, avec α sa racine, P_n est négatif avant α, s'annule en α, et est positif après α. Donc $\widetilde{P_{n+1}}$ est strictement décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$, et a un minimum global en α. Mais :

$$P_{n+1}(\alpha) = P_n(\alpha) + \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} > 0$$

  comme $n+1$ est pair et $\alpha \neq 0$. Donc $\widetilde{P_{n+1}}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et P_{n+1} n'a pas de racine réelle.

  D'où l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 14 [Polynômes et intégrales]

Par analyse-synthèse : Si on possède un tel polynôme P : notons Q une primitive de P. Alors :

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ Q(k+1) - Q(k) = k+1$$

donc le polynôme $Q(X+1) - Q(X) - X - 1$ a une infinité de racines : c'est le polynôme nul. En dérivant, on déduit : $P(X+1) - P(X) = 1$ puis en évaluant en les $k \in \mathbb{Z}$ et par télescopage : $\forall k \in \mathbb{Z},\ P(k) = \left(\sum_{i=0}^{k-1} P(i+1) - P(i)\right) + P(0) = k + P(0)$ donc $P - X - P(0)$ a une infinité de racines, donc $P = X + \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement : si P est de la forme précédente, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\int_k^{k+1} P(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{X^2}{2} + \lambda X\right]_k^{k+1} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{2} + \lambda = k + \frac{1}{2} + \lambda$$

donc un tel P est solution si, et seulement si, $\lambda = 1/2$.

Donc l'unique polynôme solution est $P(X) = X + \dfrac{1}{2}$

Exercice 15 [Un calcul de produit]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les polynômes $P = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$ et $Q = X^n - 1$.

1. Par télescopage.
2. Les racines de Q sont les racines $n$èmes de l'unité, et sont toutes simples. Comme Q est unitaire, on déduit :

$$Q = \prod_{k=1}^{n} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right)$$

puis :

$$P = \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - e^{2ik\pi/n}\right).$$

3. On reconnaît $P(1)$, qui vaut n par la première formule de P. Donc :

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k) = P(1) = n.$$

Exercice 16 [Un calcul de produit par les racines]

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\Leftrightarrow (1+z)^n = \cos(2na) + i\sin(2na) \Leftrightarrow (1+z)^n = \exp(2ina) \\ &\Leftrightarrow \frac{1+z}{\exp(2ia)} \in \mathbb{U}_n = \{\exp(2ik\pi/n) \mid k \in [\![0; n-1]\!]\} \end{aligned}$$

donc les solutions sont les :

$$\exp\left(2ia + \frac{2ik\pi}{n}\right) - 1 = 2i\exp\left(ia + \frac{ik\pi}{n}\right)\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right),\ k \in [\![0; n-1]\!]$$

par formule de l'angle moitié.
On a donc n solutions distinctes (qui sont les racines de P) : comme P est de degré n, cela veut dire que ses racines sont toutes simples.

2. On déduit, comme on connaît les racines de P et que P est unitaire :

$$P(X) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(X - 2i\exp\left(ia + \frac{ik\pi}{n}\right)\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right).$$

et en évaluant en 0 on déduit :

$$\begin{aligned} P(0) &= \prod_{k=0}^{n-1}\left(-2i\exp\left(ia + \frac{ik\pi}{n}\right)\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= (-2i)^n\exp\left(\sum_{k=0}^{n-1} ia + \frac{ik\pi}{n}\right)\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= i^{-n}2^n\exp(ina)i^{n-1}\left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right) \\ &= -i2^n\exp(ina)\alpha \end{aligned}$$

en posant $\alpha = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right)$.
Mais on a aussi $P(0) = 1 - \cos(2na) - i\sin(2na)$ ce qui donne en comparant les parties réelles et imaginaires et en posant :

$$1 - \cos(2na) = 2^n\alpha\sin(na) \text{ et } \sin(2na) = 2^n\alpha\cos(na)$$

où $\cos(na)$ ou $\sin(ba)$ est non nul (la somme de leurs carrés vaut 1), donc avec les formules de duplication :

— si $\cos(na) \neq 0$: $\alpha = \dfrac{\sin(2na)}{2^n\cos(na)} = \dfrac{\sin(na)}{2^{n-1}}$;

— sinon : $\alpha = \dfrac{1-\cos(2na)}{2^n \sin(na)} = \dfrac{\sin(na)}{2^{n-1}}$

Et finalement : $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{\sin(na)}{2^{n-1}}$.

Exercice 17 [Système sommes/produits généralisés]

On considère $P = (X-x)(X-y)(X-z) = X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy+yz+xz)X - xyz$. On cherche P suivant les relations sur x, y, z :

1. $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=-5 \\ xy+yz+zx=3 \\ xyz=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow P = X^3+5X^2+3X-9 = (X-1)(X+3)^2$ (1 racine évidente, puis polynôme de degré 2) ; ce qui donne les trois solutions :
$$(1,-3,-3),\ (-3,1,-3),\ (-3,-3,1).$$

2. $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ yz+xz+xy=xyz=-4 \\ xyz=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow P = X^3-X^2-4X+4 = (X-1)(X-2)(X+2)$ (1 racine évidente, puis polynôme de degré 2) ; donc $\{x,y,z\} = \{1,2,-2\}$ ce qui donne les six solutions :
$$(1,2,-2), (1,-2,2), (-2,1,2), (-2,2,1), (2,1,-2), (2,-2,1).$$

3. $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{array}\right.$: si (x,y,z) solution :
$$x+y+z=2,\ xy+yz+xz = \frac{1}{2}\left((x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right) = -5$$
$$\text{et } xyz = -\frac{1}{3}\left((x+y+z)^3-(x^3+y^3+z^3)-3(x+y+z)(xy+yz+zx)\right) = -6$$
donc x, y, z vérifient : $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ xy+yz+xz=-5 \\ xyz=-6 \end{array}\right.$ c'est-à-dire que ce sont les racines de $X^3-2X^2-5X+6 = (X-1)(X+2)(X-3)$ donc les solutions (éventuelles) sont :
$$(1,-2,3), (1,3,-2), (-2,1,3), (-2,3,1), (3,1,-2), (3,-2,1)$$
et tous ces triplets vérifient bien le système : ce sont donc les six solutions.

Exercice 18 [Réduction en éléments simples]

On calcule à chaque fois en premier la partie entière (pour ne pas l'oublier), on factorise le quotient (s'il n'est pas factorisé) et on détermine successivement les coefficients dans les éléments simples en essayant d'en éliminer par évaluation (après éventuel produit). On évite de tout réduire au même dénominateur et d'identifier (c'est plus compliqué). Et plus généralement, on évite tout calcul compliqué.

1. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 + \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2} = 1 - \dfrac{8}{X-1} + \dfrac{13}{X-2}$ (on trouve a et b en multipliant l'égalité par $X-1$ ou $X-2$ puis en évaluant en 1 ou 2) ;
2. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{X-2} + \dfrac{c}{X-3} = \dfrac{1}{X-1} - \dfrac{5}{X-2} + \dfrac{5}{X-3}$ (ou multiple par $X-i$ puis on évalue en i pour $i = 1, 2, 3$) ;

3. $\dfrac{1}{X(X-1)^2}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X-1}+\dfrac{c}{(X-1)^2}=\dfrac{1}{X}-\dfrac{1}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}$: on trouve a et c en multipliant par X ou $(X-1)^2$ et en évaluant en 0 ou 1 ; on en déduit $b=-a$ en notant que :

$$\frac{1}{x(x-1)^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x^3}\underset{x\to+\infty}{=}\mathrm{o}(1/x)\text{ et }\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{(x-1)^2}\underset{x\to+\infty}{=}\frac{a}{x}+\frac{b}{x}+o(1/x)=\frac{a+b}{x}+\mathrm{o}(1/x$$

ce qui impose $a=b$.

4. $\dfrac{2X}{X^2+1}=\dfrac{2X}{X^2+1}$ (sur $\mathbb{R}$) ou $\dfrac{a}{X+i}+\dfrac{b}{X-i}=\dfrac{1}{X+i}+\dfrac{1}{X-i}$ (sur $\mathbb{C}$) qu'on peut voir en notant que, par unicité, a et b sont conjugués, et par imparité ils sont égaux (donc réels), et c'est facile ensuite de conclure ;

5. $\dfrac{1}{X^2+X+1}=\dfrac{1}{X^2+X+1}$ (sur $\mathbb{R}$) $=\dfrac{a}{X-j}+\dfrac{b}{X-\overline{j}}=\dfrac{-i\sqrt{3}/3}{X-j}+\dfrac{i\sqrt{3}/3}{X-\overline{j}}$ (on multiplie par $X-j$ ou $X-\overline{j}$ et on évalue en j ou $\overline{j}$) (avec $j=e^{2i\pi/3}$) ;

6. $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}=\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$ (sur $\mathbb{R}$) $=\dfrac{a}{X-i}+\dfrac{b}{(X-i)^2}+\dfrac{c}{X+i}+\dfrac{d}{(X+i)^2}=-\dfrac{i}{X-i}-\dfrac{1}{(X-i)^2}+\dfrac{i}{X+i}-\dfrac{1}{(X+i)^2}$ (on trouve b et d en multipliant par $(X\pm i)^2$ et en évaluant en ∓ 1, et on déduit a,c en réinjectant ; et on peut utiliser des ordres de grandeur pour aller plus vite dans le calcul de a et c) ;

7. $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X^2}+\dfrac{c}{X+1}+\dfrac{d}{(X+1)^2}=\dfrac{5}{X}-\dfrac{1}{X^2}-\dfrac{5}{X+1}-\dfrac{4}{(X+1)^2}$ (même méthode qu'avant) ;

8. $\dfrac{1}{X^4+X^2+1}=\dfrac{1}{(X-e^{i\pi/3})(X-e^{-i\pi/3})(X+e^{i\pi/3})(X+e^{-i\pi/3})}=\dfrac{1}{(X^2-X+1)(X^2+X+1)}=\dfrac{aX+b}{X^2-X+1}+\dfrac{cX+d}{X^2+X+1}=\dfrac{-1/2X+1/2}{X^2-X+1}+\dfrac{1/2X+1/2}{X^2+X+1}$ (sur $\mathbb{R}$) $=\dfrac{\alpha}{X-e^{i\pi/3}}+\dfrac{\beta}{X-e^{-i\pi/3}}+\dfrac{\gamma}{X+e^{i\pi/3}}+\dfrac{\delta}{X+e^{-i\pi/3}}=\dfrac{e^{-5i\pi/6}/2\sqrt{3}}{X-e^{i\pi/3}}+\dfrac{e^{5i\pi/6}/2\sqrt{3}}{X-e^{-i\pi/3}}+\dfrac{-e^{-5i\pi/6}/2\sqrt{3}}{X+e^{i\pi/3}}-\dfrac{e^{5i\pi/6}/2\sqrt{3}}{X+e^{-i\pi/3}}$ (sur $\mathbb{C}$). Sur $\mathbb{C}$, on multiplie directement par $X\pm e^{\pm i\pi/3}$ puis on évalue en $\mp e^{\pm i\pi/3}$ (que des pôles simples). Sur $\mathbb{R}$, on peut regrouper dans la réduction sur $\mathbb{C}$ ou faire directement mais les calculs sont plus lourds) ;

9. $\dfrac{9}{(X^3-1)^2}=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{(X-1)^2}+\dfrac{cX+d}{X^2+X+1}+\dfrac{eX+f}{(X^2+X+1)^2}=\dfrac{-2}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}+\dfrac{2X+3}{X^2+X+1}+\dfrac{3X+3}{(X^2+X+1)^2}$(sur $\mathbb{R}$) $=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{(X-1)^2}+\dfrac{\alpha}{X-j}+\dfrac{\beta}{(X-j)^2}+\dfrac{\gamma}{(X-\overline{j})}+\dfrac{\delta}{(X-\overline{j})^2}=\dfrac{-2}{X-1}+\dfrac{1}{(X-1)^2}+\dfrac{-2j}{X-j}+\dfrac{\overline{j}}{(X-j)^2}+\dfrac{-2\overline{j}}{(X-\overline{j})}+\dfrac{j}{(X-\overline{j})^2}$ (sur $\mathbb{C}$).

Exercice 19 [Autres décompositions en éléments simples]

On écrit la décomposition en éléments simples :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha_k}{X-k}$$

et on calcule α_k en multipliant par $X-k$ et en évaluant en k, ce qui donne :

$$\alpha_k=\frac{n!}{k(k-1)\dots 1\cdot(-1)(-2)\dots(k-n)}=(-1)^{n-k}\binom{n}{k}$$

et finalement :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{X-k}$$

On procède de deux manières pour le second polynôme :

— par calcul direct :

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - \omega^k}.$$

où $\omega = e^{2i\pi/n}$. Et en multipliant par $X - \omega^k$ puis en évaluant en ω^k on déduit que :

$$\alpha_k = \frac{\omega^{kn-k}}{\prod_{l \neq k} \omega^k - \omega^l} = \frac{1}{\prod_{l \neq k} 1 - \omega^{l-k}} = \frac{1}{n}$$

en retrouvant le résultat d'un exercice précédent.

— en reconnaissant du P'/P : si on pose $P = X^n - 1$, alors :

$$\frac{X^{n-1}}{X^n - 1} = \frac{1}{n}\frac{P'}{P} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X - \omega^k}$$

en notant que les ω^k sont les racines simples de P.

Exercice 20 [Recomposition d'éléments simples]

Notons déjà que, si on écrit cette fraction de manière irréductible sous la forme P/Q, alors $Q = \prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} X - \omega = X^n - 1$ et $\deg(P) < \deg(Q) = n$ (comme il n'y a pas de partie entière).

Mais alors on a l'écriture :

$$\frac{P}{Q} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\frac{P(\omega)}{Q'(\omega)}}{X - \omega}$$

donc pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$: $\omega^2 = \dfrac{P(\omega)}{n\omega^{n-1}}$, puis $P(\omega) = n\omega^{n+1} = n\omega$.

Donc $P = nX$.

Et ainsi : $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X - \omega} = \frac{nX}{X^n - 1}$.

Exercice 21 [Multiples et diviseurs de polynômes scindés]

On procède à chaque fois par double implication :

1. Si P divise A : notons $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = A$. Les racines de P et de Q sont exactement les mêmes racines que A. Notons $n_1, \dots, n_r$ et $n'_1, \dots, n'_r$ leurs multiplicités (éventuellement nulles) pour P et Q. Comme $PQ = A$, alors :

$$\forall k \in [\![1; r]\!],\ n_k + n'_k = m_k$$

et on a donc, en utilisant les degrés :

$$\deg(P) + \deg(Q) = \deg(A) = \sum_{k=1}^{r} m_k = \sum_{k=1}^{r} n_k + \sum_{k=1}^{r} n'_k \leqslant \deg(P) + \deg(Q)$$

et donc l'inégalité précédente est une égalité, ce qui impose que $\sum_{k=1}^{r} n_r = \deg(P)$, donc P est scindé (et Q aussi).

Réciproquement, si P est scindé et que toutes ses racines son racines de A de multiplicité plus petites que pour A, on peut écrire :

$$P = \beta(X - \lambda_1)^{n_1}(X - \lambda_2)^{n_2} \dots (X - \lambda_r)^{n_r}$$

pour $\beta \in \mathbb{K}^*$ et $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall i \in [\![1; r]\!],\ n_i \leqslant m_i$. Mais alors, en posant $Q = \dfrac{\alpha}{\beta}(X - \lambda_1)^{m_1 - n_1}(X - \lambda_2)^{m_2 - n_2} \dots (X - \lambda_r)^{m_r - n_r} \in \mathbb{K}[X]$, on a : $A = PQ$. Et donc P divise A.

2. Si A divise P, alors $(X-\lambda_1)^{m_1}\dots(X-\lambda_r)^{m_r}$ divise P, donc chaque λ_k est racine de P de multiplicité au moins m_k.

   Réciproquement, si tous les λ_k sont racines de P de multiplicité $n_k \geqslant m_k$, alors il existe un polynôme Q tel que :

$$P = (X-\lambda_1)^{n_1}\dots(X-\lambda_r)^{n_r}\cdot Q = \underbrace{(\alpha(X-\lambda_1)^{m_1}\dots(X-\lambda_r)^{m_r})}_{=A}\left(\frac{1}{\alpha}(X-\lambda_1)^{n_1-m_1}\dots(X-\lambda_r)^{n_r-m_r}Q\right)$$

   et donc A divise P.

Exercice 22 [Dérivées de polynômes scindés]

1. Soit P un polynôme scindé. Alors :
   - si P est de degré 1 : P' est constant ; toutes ses dérivées suivantes sont nulles, donc constantes aussi, ce qui prouve le résultat dans ce cas ;
   - sinon : on pose $P = \alpha\prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_r$ les racines distinctes de P. Et alors :
     - par multiplicité de la racine d'une dérivée : chaque λ_k est racine de P' de multiplicité m_{k-1} ;
     - par théorème de Rolle : pour tout $k \in [\![1; r-1]\!]$, $P(\lambda_k) = P(\lambda_{k+1})$ donc P' possède une racine $\mu_k \in]\lambda_k; \lambda_{k+1}[$ (dont on ne connaît pas la multiplicité a priori.

     Et la somme des multiplicités de ces racines est (au moins) de :

$$\sum_{k=1}^{r}(m_k-1) + \sum_{k=1}^{r-1}1 = \underbrace{\sum_{k=1}^{r}m_k}_{=\deg(P)} - r + (r-1) = \deg(P) - 1 = \deg(P')$$

     ce qui prouve que P' est scindé.

     On déduit par récurrence (en appliquant ce résultat à P') que toutes les dérivées de P sont scindées.

2. Soit P scindé à racines simples : le même raisonnement que ci-dessus montre que, entre deux racines consécutives de P, P' possède une racine. Le nombre des racines de P étant égal à son degré (il est scindé à racines simples), on déduit qu'il en est de même pour P', qui est donc scindé à racines simples. On conclut comme précédemment par récurrence.

Exercice 23 [Racines réelles et coefficients]

Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.

1. C'est l'exercice précédent.
2. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines de P. Alors on a la réduction en éléments simples :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_k}$$

   Et donc, avec les notations de l'énoncé, la fonction f, définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ est donnée par :

$$f : x \mapsto \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-\lambda_k}$$

   et est donc dérivable sur son ensemble de définition, de dérivée :

$$f' : x \mapsto \sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{(x-\lambda)^k} < 0$$

mais par dérivée d'un quotient, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},\ f'(x) = \frac{P''(x)P(x) - (P'(x))^2}{(P(x))^2} < 0$$

et comme $P(x) > 0$ pour ces valeurs de x, on déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\},\ (P'(x))^2 - P''(x)P(x) > 0$$

et la continuité de $x \mapsto (P'(x))^2 - P''(x)P(x)$ sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction polynomiale) permet, par passage à la limite, d'avoir l'inégalité large sur $\mathbb{R}$ entier.

3. L'inégalité précédente est valable aussi pour les dérivées de P (qui sont scindées à racines simples). En l'appliquant à $P^{(k-1)}$ et en évaluant en 0, il vient directement :

$$((k!)a_k)^2 - ((k-1)!a_{k-1})((k+1)!a_{k+1}) \geqslant 0$$

ce qui donne :

$$a_k^2 \geqslant \frac{(k-1)!(k+1)!}{(k!)^2} a_{k-1}a_{k+1} = \frac{k+1}{k} a_{k-1}a_{k+1} \geqslant a_{k-1}a_{k+1}$$

et on a bien l'inégalité voulue.

Exercice 24 [Polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Notons $a_0, \ldots, a_n$ les coefficients de P. Alors :
   - P étant à racines simples, si 0 est racine de P (ce qui veut dire $a_0 = 0$), alors 0 n'est pas racine de P', donc $a_1 \neq 0$;
   - les dérivées successives de P sont aussi à racines simples : si l'un des a_k est nul, ce qui veut dire que 0 est racine de $P^{(k)}$, alors 0 n'est pas racine de $P^{(k+1)}$ donc $a_{k+1} \neq 0$.

   Et on a bien le résultat demandé.
2. Si α est une racine de $Q = P^2 + 1$, alors $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Mais $Q' = 2PP'$ a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$. Donc α n'est pas racine de Q'. Donc α est racine simple.

Exercice 25 [Polynômes scindés sur $\mathbb{R}$]

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$:
- si $\alpha = 0$: $P + \alpha P' = P$ est scindé ;
- sinon : posons $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$: alors $f : x \mapsto P(x)e^{\beta x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit, avec :

  $$f' : x \mapsto P'(x)e^{\beta x} + \beta P(x)e^{\beta x} = \beta\left(P(x) + \alpha P'(x)\right)e^{\beta x}$$

  et en particulier les racines de $Q = P + \alpha P'$ sont exactement les points critiques de f. Mais on a également que les points d'annulation de f sont les racines de P, et que f tend vers 0 en $+\infty$ (si $\beta < 0$) ou en $-\infty$ (si $\beta > 0$) par croissances comparées. Par théorème de Rolle (version classique et version limite), on déduit que f possède un point critique (strictement) entre deux racines consécutives de P, et une autre hors des racines.

  Comme toute racine de P de multiplicité $m \geqslant 2$ est également racine de P', donc de Q, de multiplicité $(m-1)$, on retrouve comme dans l'exercice 22 que Q possède autant de racines que son degré : donc Q est scindé.