# Feuille d'exercices n$^o$20 : Polynômes

**Exercice 1 [Équations en les polynômes]**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$, en commençant par étudier le degré de $P$ :

1. $P \circ P = P$ ;
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

**Exercice 2 [Valeurs d'un polynôme sur $\mathbb{U}$]**

On considère $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{C}[X]$, et on pose $M = \sup\limits_{|z|=1}|P(z)|$.

1. Soient $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$ et $k \in \{0,\dots,n\}$. Montrer que, pour tout $j \in \{0,\dots,n\}$ : $\sum_{l=0}^n \left(\omega^{j-k}\right)^l = 0$ ou $(n+1)$ suivant que $k \neq j$ ou $k = j$. Et en déduire que : $P(1) + \omega^{-k}P(\omega) + \cdots + \omega^{-nk}P(\omega^n) = (n+1)a_k$.
2. En déduire que, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ : $|a_k| \leqslant M$.

**Exercice 3 [Une suite de polynômes]**

On considère les polynômes $P_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, définis par :

$$P_1 = X - 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1} = P_n^2 - 2.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $a_n, b_n, c_n$ respectivement les coefficients de degré $0, 1, 2$ de $P_n$. Calculer explicitement $a_n, b_n, c_n$ : on pourra expliciter une relation de récurrence entre $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ et $a_n, b_n, c_n$ puis montrer successivement que $(a_n)$ est constante, $(b_n)$ est géométrique, et $\left(\dfrac{c_n}{4^n}\right)$ est arithmético-géométrique.

**Exercice 4 [Équations en des polynômes et leurs dérivées]**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$ :

1. $P'^2 = 4P$ ;
2. $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.

**Exercice 5 [Taylor à l'envers]**

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que : $P(X+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\deg(P)} \frac{1}{n!}P^{(n)}(X)$.

**Exercice 6 [Parité de polynômes]**

On dit qu'il polynôme est **pair** (resp. **impair**) si $P(-X) = P(X)$ (resp. $P(-X) = -P(X)$).

1. Montrer que, pour $P = \sum a_kX^k$, on a les équivalences :
$$P \text{ pair } \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ a_{2k+1} = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ P^{(2k+1)}(0) = 0.$$
2. Donner une équivalence analogue pour les polynômes impairs.
3. Montrer que $P$ est pair (resp. impair) si, et seulement si : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) = P(-k)$ (resp. $P(k) = -P(-k)$). La même condition est-elle valable pour une fonction quelconque ?

**Exercice 7 [Divisibilités de polynômes]**

Montrer que l'on a les relations de divisibilité suivantes et calculer les quotients correspondants :

1. $(X-1)|(X^3-2X^2+3X-2)$ ; 2. $(X-2)|(X^3-3X^2+3X-2)$ ; 3. $(X+1)|(X^3+3X^2-2)$.

**Exercice 8 [Quelques divisibilités]**

On considère $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-P(X)$.
2. Déduire que $P(X)-X$ divise $P(P(X))-X$.
3. Plus généralement, si $l \in \mathbb{N}^*$ et que $Q_l = \underbrace{P \circ \cdots \circ P}_{l \text{ fois}}$, montrer que $P(X)-X$ divise $Q_l(X)-X$.

**Exercice 9 [Divisibilité, division et racines]**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le lien avec les racines de polynômes :

1. Montrer que $(X-1)^3$ divise $nX^{n+2}-(n+2)X^{n+1}+(n+2)X-n$ ;
2. Donner la multiplicité de 1 comme racine de $nX^{n+1}-(n+1)X^n+1$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n(X+1)^2$ par $(X+1)(X-2)$.
4. Déterminer pour quelles valeurs de $n$ le polynôme $(X-1)^n-X^n+2X-1$ est divisible par $2X^3-3X^2+X$.

**Exercice 10 [Unicité de la division euclidienne]**

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, calculer le reste de la division euclidienne de $(\cos(t)+X\sin(t))^n$ par $X^2+1$.

Plus généralement, si $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, calculer le reste de la division euclidienne de $\prod_{k=1}^n (\cos(a_k) + X\sin(a_k))$ par $X^2+1$.

**Exercice 11 [Divisibilité dans les entiers et les polynômes]**

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $r$ le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$. Montrer que le reste de la division euclidienne de $X^a$ par $X^b-1$ est $X^r$.
2. En déduire que : $b|a \Leftrightarrow X^b-1|X^a-1$.

**Exercice 12 [Équation en des polynômes à l'aide de racines]**

En raisonnant éventuellement sur les racines des polynômes qui interviennent, résoudre les équations suivantes d'inconnues $P \in \mathbb{C}[X]$ :

1. $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ ; 2. $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

**Exercice 13 [Suite de polynômes définie implicitement]**

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que : $P_n - P_n' = \dfrac{X^n}{n!}$, et donner explicitement $P_n$ (par ses coefficients).
2. Montrer que toutes les racines (complexes ou réelles) de $P_n$ sont simples.
3. Montrer que $P_n' = P_{n-1}$ et en déduire, en fonction de $n \in \mathbb{N}$, le nombre de racines réelles de $P_n$. On pourra procéder par récurrence sur $n$.

**Exercice 14 [Polynômes et intégrales]**

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \int_k^{k+1} P(t)\mathrm{d}t = k+1.$$

**Exercice 15 [Un calcul de produit]**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère les polynômes $P = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$ et $Q = X^n - 1$.

1. Montrer que $(X-1)P(X) = Q(X)$.
2. En déduire la factorisation de $P$ sur $\mathbb{C}$.
3. On pose $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}(1-\omega^k)$.

**Exercice 16 [Un calcul de produit par les racines]**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $P = (1+X)^n - (\cos(2na) + i\sin(2na))$.

1. Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ : $P(z) = 0$. En déduire les racines de $P$, et que celles-ci sont toutes simples.
2. En déduire une factorisation de $P$, puis la valeur de $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$ (on pourra calculer $P(0)$ de deux manières).

**Exercice 17 [Système sommes/produits généralisés]**

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants. On pourra commencer par déterminer les coefficients de $P = (X-x)(X-y)(X-z)$.

1. $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=-5 \\ xy+yz+zx=3 \\ xyz=9 \end{array}\right.$ ;
2. $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xyz=-4 \end{array}\right.$ ;
3. $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ x^2+y^2+z^2=14 \\ x^3+y^3+z^3=20 \end{array}\right.$ .

**Exercice 18 [Réduction en éléments simples]**

Donner la réduction en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ ;
2. $\dfrac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$ ;
3. $\dfrac{1}{X(X-1)^2}$ ;
4. $\dfrac{2X}{X^2+1}$ ;
5. $\dfrac{1}{X^2+X+1}$ ;
6. $\dfrac{4}{(X^2+1)^2}$ ;
7. $\dfrac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$ ;
8. $\dfrac{1}{X^4+X^2+1}$ ;
9. $\dfrac{9}{(X^3-1)^2}$.

**Exercice 19 [Autres décompositions en éléments simples]**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les décompositions en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} \text{ et } \frac{X^{n-1}}{X^n-1}.$$

**Exercice 20 [Recomposition d'éléments simples]**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la forme irréductible de la fraction rationnelle dont la décomposition en éléments simples est : $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{\omega^2}{X-\omega}$.

**Exercice 21 [Multiples et diviseurs de polynômes scindés]**

On considère $A \in \mathbb{K}[X]$ scindé, dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ les racines deux-à-deux distinctes et $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

1. $P$ divise $A$ si, et seulement si, $P$ est scindé, et pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_i$ est racine de $P$ de multiplicité au plus $\alpha_i$ ;
2. $P$ est un multiple de $A$ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\lambda_i$ est racine de $P$ de multiplicité au moins $\alpha_i$.

**Exercice 22 [Dérivées de polynômes scindés]**

À l'aide du théorème de Rolle, montrer que :

1. les dérivées successives d'un polynôme scindé sont scindées ou constantes ;
2. si le polynôme de départ est de plus à racine simple, il en est de même pour ses dérivées non constantes.

**Exercice 23 [Racines réelles et coefficients]**

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.

1. Montrer que toutes les dérivées successives de $P$ ont également toutes leurs racines réelles.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ (P'(x))^2 - P(x)P''(x) \geqslant 0$. On pourra utiliser la fonction $f : x \mapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$.
3. En déduire que : $\forall k \in \{1, \ldots, n-1\},\ a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

**Exercice 24 [Polynômes scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$]**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que $P$ ne peut pas posséder deux coefficients consécutifs nuls.
2. Montrer que toutes les racines de $P^2 + 1$ sont simples.

**Exercice 25 [Polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ ]**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$ (à racines éventuellement multiples). Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le polynôme $P + \alpha P'$ est également scindé sur $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser la fonction $x \mapsto P(x)e^{\beta x}$ pour $\beta$ bien choisi et rechercher ses points critiques).