Feuille d'exercices n^{o}1 : Logique et raisonnements

Exercice 1 [Tables de vérité]
Immédiat (il suffit de faire les tables)

Exercice 2 [Négation d'assertions]

1. A et B et C ;
2. A et B et C ;
3. non A et (non B ou non C) (plus facile par table de vérité) ;
4. $\exists x \in E$, $\forall y \in F$, non $A(x, y)$;
5. $\forall y \in F$, $\exists x \in E$, non $A(x, y)$;
6. $(\forall x,\ \text{non } A(x))$
ou $(\exists x_1, x_2,\ (A(x_1) \text{ et } A(x_2) \text{ et } x_1 \neq x_2))$

Exercice 3 [Quantificateurs]
Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse, et le prouver :

1. vrai : $x = y = 1$ convient ;
2. faux : $y = -x$ est un contre-exemple ;
3. vrai : $y = -x + 1$ convient ;
4. faux : $x = y = 0$ est un contre-exemple.

Exercice 4 [Implications et contraposées]

1. Implication : si un nombre est impair, alors il n'est pas la somme de deux nombres impairs.
Contraposée : si un nombre est la somme de deux nombres impairs, alors il est pair.
Preuve : soient $a = 2n+1, b = 2m+1$, avec $n, m \in \mathbb{Z}$, deux nombres impairs. Alors : $a+b = 2\times(n+m+1)$ est pair.
2. Implication : un nombre premier est strictement plus grand que 2, alors il est impair.
Contraposée : si un nombre premier est pair, alors il est inférieur ou égal à 2.
Preuve : soit p premier pair. Alors p est seulement divisible par 1 et par p, et p est divisible par 2. Donc $p = 2$. Donc $p \leqslant 2$.
3. Implication : c'est l'énoncé.
Contraposée : si m, n sont deux entiers impairs tels que m divise $2n$, alors m divise n.
Preuve : on écrit $m = 2a+1$ et n avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Il existe c tel que $c \times m = 2n$, c'est-à-dire : $2ac+c = 2n$. Donc $c = 2n - 2ac$ est pair. On écrit $c = 2b$. Alors : $2bm = 2n$, donc $bm = n$ et m divise bien n.

Exercice 5 [Raisonnements direct]

1. Si $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$ sont deux rationnels, alors : $x + y = \frac{pq'+p'q}{qq'}$ est un rationnel.
2. Si n est un entier impair, on écrit $n = 2k + 1$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Alors : $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$ est impair.

Exercice 6 [Raisonnements par disjonction de cas]

1. — si $x \geqslant 1$: $|x - 1| = x - 1$. On veut montrer que $x^2 - x + 1 \geqslant x - 1$. Et $x^2 - x + 1 - (x - 1) = x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. Donc le résultat est vrai et il n'y a pas d'égalité possible.

— si $x \leqslant 1$: $|x-1| = 1-x$. On veut montrer que $x^2 - x + 1 \geqslant 1 - x$. Et $x^2 - x + 1 - (1-x) = x^2 \geqslant 0$ avec égalité si $x = 0$.

On a donc bien l'inégalité, avec égalité si, et seulement si, $x = 0$.

2. — si n est pair : $n = 2m$ donc $n^2 + 3n + 1 = 4m^2 + 6m + 1 = 2 \times (2m^2 + 3m) + 1$ est impair ;
   — si n est impair : $n = 2m+1$ donc $n^2+3n+1 = 4m^2+4m+1+6m+3+1 = 2\times(2m^2+5m+2)+1$ est impair.
3. — si $x \leqslant -1$: l'équation devient $-x - 1 = 3 - (2 - 3x)$ et n'a pas de solution pour $x \leqslant -1$;
   — si $-1 \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$: l'équation devient $x + 1 = 3 - (2 - 3x)$ et a 0 pour seule solution ;
   — si $x \geqslant \frac{2}{3}$: l'équation devient $x + 1 = 3 - (3x - 2)$ et a 1 comme seule solution.

   Donc les solutions sont 0 et 1.

Exercice 7 [Un raisonnement par disjonction de cas plus poussé]

1. $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$.
2. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel : $x = y = \sqrt{2}$ convient.
3. Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel : $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $y = \sqrt{2}$ convient.
4. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est soit rationnel, soit irrationnel. Donc on a bien une solution.

Exercice 8 [Raisonnements par contraposition ou par l'absurde]
À l'aide d'un raisonnement par contraposition ou par l'absurde :

1. Considérer $p_1 \cdot \ldots p_n + 1$.
2. $\sqrt{2}$ dans le cours ; $\sqrt{6}$ très proche ; $\sqrt{2} + \sqrt{3}$: élever au carré, et se ramener à "$\sqrt{6}$ est irrationel".
3. Par contraposée. Réciproque fausse ($x = \sqrt{2}$).
4. Factorisation de $a^k - 1$ pour k impair.
5. Par l'absurde.

Exercice 9 [Un raisonnement par l'absurde plus poussé]
Facile

Exercice 10 [Raisonnements par analyse-synthèse]

1. $x \mapsto \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $x \mapsto \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ conviennent.
2. Analyse : mettre au carré et résoudre. Synthèse : vérifier que $x(x-3)$ et $3x-5$ sont positifs.

Exercice 11 [Un raisonnement par analyse-synthèse plus poussé]
Utiliser les rotations d'angle $\pm\pi/3$ dans un triangle équilatéral de centre un sommet : elle envoie le deuxième sommet sur le troisième.

Exercice 12 [Raisonnements par récurrence]
À l'aide d'un raisonnement par récurrence :

1. Classique.
2. Immédiat.
3. Récurrence forte.

4. L'hérédité utilise que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ avec égalité ssi $x = 1$. La condition d'égalité en découle : tous les a_i sont égaux.

Exercice 13 [Un raisonnement par récurrence plus poussé]
Pour tout entier naturel non nul n, on note p_n le n-ème nombre premier.

1. On montre que p_{n+1} est au plus un diviseur de $p_1 \dots p_n + 1$.
2. Récurrence forte avec somme géométrique.