Feuille d'exercices n^{o}1 : Logique et raisonnements

Exercice 1 [Tables de vérité]
À l'aide de tables de vérité, montrer les assertions suivantes :

1. $(A \text{ ou } B) \text{ ou } C \equiv A \text{ ou } (B \text{ ou } C)$;
2. $A \text{ et } (B \text{ ou } C) \equiv (A \text{ et } B) \text{ ou } (A \text{ et } C)$;
3. $A \text{ ou } (B \text{ et } C) \equiv (A \text{ ou } B) \text{ et } (A \text{ ou } C)$;
4. $\text{non}\,(A \text{ et } B) \equiv [(\textit{non } A) \text{ ou } (\textit{non } B)]$;
5. $((A \Rightarrow B) \text{ et } (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$;
6. $(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((C \Rightarrow A) \Leftrightarrow (C \Rightarrow B))$.

Exercice 2 [Négation d'assertions]
Écrire les négation des assertions suivantes :

1. $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \text{ non } C)$;
2. $A \Rightarrow (\text{ non } B \text{ ou } \text{ non } C)$
3. $(A \text{ et } (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Leftrightarrow C))$;
4. $\forall x \in E, \exists y \in F, A(x, y)$;
5. $\exists y \in F, \forall x \in E, A(x, y)$;
6. $\exists! x,\ A(x)$

Exercice 3 [Quantificateurs]
Dire si chacune des assertions suivantes est vraie ou fausse, et le prouver :

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
2. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$;
4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$.

Exercice 4 [Implications et contraposées]
Écrire chacune des assertions suivantes comme une implication, puis écrire et démontrer leurs contraposées :

1. Aucun nombre impair n'est la somme de deux nombres impairs.
2. Tout nombre premier strictement plus grand que 2 est impair.
3. Si m, n sont deux entiers impairs tels que m ne divise pas n, alors m ne divise pas $2n$.

Exercice 5 [Raisonnements direct]
Montrer les assertions suivantes à l'aide d'un raisonnement direct :

1. La somme de deux rationnels est un rationnel.
2. Le carré d'un entier impair est un entier impair.

Exercice 6 [Raisonnements par disjonction de cas]
À l'aide d'un raisonnement par disjonction de cas :

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x - 1| \leqslant x^2 - x + 1$, et étudier les cas d'égalité.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n : $n^2 + 3n + 1$ est impair.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $|x + 1| = 3 - |3x - 2|$.

Exercice 7 [Un raisonnement par disjonction de cas plus poussé]
On souhaite montrer qu'il existe deux irrationnels x, y tels que x^y est rationnel.

1. Calculer : $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$.

2. En déduire une solution au problème si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel.
3. En déduire une solution au problème si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.
4. Conclure.

Exercice 8 [Raisonnements par contraposition ou par l'absurde]
À l'aide d'un raisonnement par contraposition ou par l'absurde :
1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
2. Montrer que $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{2}+\sqrt{3}$ sont irrationnels.
3. Montrer que, si x est un irrationnel positif, alors $\sqrt{x}$ aussi. La réciproque est-elle vraie ?
4. Montrer que, si 2^n+1 est un nombre premier, alors n est une puissance de 2.
5. Montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 9 [Un raisonnement par l'absurde plus poussé]
On souhaite montrer que l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas. Pour cela, on suppose par l'absurde qu'il existe, et on le note E.

On pose l'ensemble $A = \{x \in E \,|\, x \notin x\}$.
1. Expliquer avec des mots en quoi consiste l'ensemble A.
2. Montrer qu'on a l'équivalence : $A \in A \Leftrightarrow A \notin A$.
3. En déduire que E n'existe pas.

Exercice 10 [Raisonnements par analyse-synthèse]
À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse :
1. Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$.

Exercice 11 [Un raisonnement par analyse-synthèse plus poussé]
Soit A un point du plan, et $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites parallèles. On souhaite déterminer les points $B \in \mathcal{D}_1$ et $C \in \mathcal{D}_2$ possibles pour que le triangle ABC soit équilatéral. Pour cela, on suppose avoir construit un tel triangle, et que $\widehat{BAC} = +\frac{\pi}{3}$.
1. On note Δ_1 l'image de $\mathcal{D}_1$ par la rotation de centre A et d'angles $+\dfrac{\pi}{3}$. Quel est la position de C par rapport aux droites du problème ?
2. En déduire qu'un tel triangle est unique, et expliciter sa construction.
3. Combien le problème initial admet-il de solutions ?

Exercice 12 [Raisonnements par récurrence]
À l'aide d'un raisonnement par récurrence :
1. Montrer que pour tout entier naturel n : $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 8$: $2^n > 18(n+1)$
3. Montrer que tout entier naturel non nul s'écrit comme produit de nombres premiers.
4. Montrer que, si $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels strictement positifs, alors : $(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$, et préciser la situation d'égalité.

Exercice 13 [Un raisonnement par récurrence plus poussé]
Pour tout entier naturel non nul n, on note p_n le n-ème nombre premier.
1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_{n+1} \leqslant p_1 p_2 \ldots p_n + 1$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.