Feuille d'exercices n^{o}19 : Dérivabilité

Exercice 1 [Calculs de dérivées]

1. $x \mapsto \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}$: définie sur $\mathbb{R}^*$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par quotient ou par inverse en utilisant l'écriture $1+\dfrac{2}{e^{x^2}-1}$ de dérivée $x \mapsto -\dfrac{4xe^{x^2}}{\left(e^{x^2}-1\right)^2}$.
2. $x \mapsto (\cos(x))^{\sin x}$ définie pour x tel que $\cos(x) > 0$ donc sur $\cup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi-\pi/2;2k\pi+\pi/2[$ et pas prolongeable au bord (à la rigueur définie ponctuellement en les $(2k+1)\pi$, mais aucun intérêt) ; on dérive avec l'écriture exponentielle $(\cos(x))^{\sin x} = \exp\left(\sin(x)\ln\left(\cos(x)\right)\right)$ ce qui donne la dérivabilité sur tout l'ensemble de définition avec pour dérivée $x \mapsto \dfrac{\cos^2(x)\ln(\cos(x)) - \sin^2(x)}{\cos(x)}(\cos(x))^{\sin x}$;
3. Arccos $\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ définie sur $[-1;1]$ et dérivable sur $]-1;0[\cup]0;1[$ par composée (problème en 0 à cause de Arccos et en ±1 à cause de la racine) de dérivée $x \mapsto \dfrac{\text{signe}(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ où $\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$.
   Reste en les autres points de l'ensemble de définition :
   - en 0 : pas dérivable avec des taux d'accroissements qui tendent vers 1 à droite et -1 à gauche (ressemble à $|x|$) ;
   - en ±1 : pas dérivable avec des tangentes verticales (par limite de la dérivée).
4. $x \mapsto \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$: pas de problème pour la racine (qu'on sort avec un facteur $1/2$ du ln) car tout est positif dans la racine. Seul problème si $\cos(x) = 1$ (pour le dénominateur) ou $\cos(x) = -1$ (numérateur nul, donc problème avec le ln) donc fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$ et non prolongeable en les éléments de $\pi\mathbb{Z}$ car (par composée) on a alors comme limite $+\infty$ (en les $2k\pi$) ou $-\infty$ (en les $(2k+1)\pi$). Et par composée pas de problème de dérivabilité sur $\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$, avec pour dérivée : $x \mapsto -\dfrac{1}{\sin(x)}$ (qu'on calcule en écrivant $\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}} = \dfrac{1}{2}\left(\ln(1+\cos(x)) - \ln(1-\cos(x))\right)$).
5. $x \mapsto \text{Arctan}\left(\text{sh}(x)\right)$: définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (composée) de dérivée $x \mapsto \dfrac{\text{ch}(x)}{1+\text{sh}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}(x)}$.
6. $x \mapsto \ln|\tan(x)|$: définie sur $\mathbb{R}\setminus\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$ et pas de prolongement continu (limites $+\infty$ en les $k\pi+\pi/2$ et $-\infty$ en les $k\pi$). Dérivable par composée de dérivée : $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)\sin(x)}$.
7. $x \mapsto \text{Arcsin}(1-x^2)$: définie sur $[-1;1]$ et dérivable sur $[-1;0[\cup]0;1]$ par composée de dérivée : $x \mapsto -\dfrac{2\text{signe}(x)}{\sqrt{2-x^2}}$. Et pas dérivable en 0 (taux d'accroissements qui tendent vers $-\sqrt{2}$ à droite et $\sqrt{2}$ à gauche).
8. $x \mapsto \lfloor x\rfloor + \sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$: définie sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ (voir feuille 16) et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ par composée de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}}$ (la partie entière a une dérivée nulle sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$). Non dérivable en les entiers, avec une demi-tangente verticale à droite et une pente de $\dfrac{1}{2}$ à gauche.
9. $x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$: définie sur $[-1;1]$. Dérivable sur $]-1;1[$ par quotient et composée, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$ (après simplifications). Non dérivable en ±1 (tangentes verticales, par limite de la dérivée).

Exercice 2 [Symétrie et dérivées]

La dérivée d'une fonction paire et impaire ; celle d'une fonction impaire est paire ; celle d'une fonction T-périodique est T-périodique. On le fait par taux d'accroissements :

— si f paire : $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{f(-x-h)-f(-x)}{h} = -\dfrac{f(-x+h')-f(-x)}{h'}$ en posant $h' = -h$, et en passant à la limite pour h (donc h') tendant vers 0 : $f'(x) = -f'(-x)$;

— si f impaire : pareil en notant que $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{-f(-x-h)+f(-x)}{h} = \dfrac{f(-x+h')-f(-x)}{h'}$;

— si f est T-périodique : $\dfrac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h} = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ et par passage à la limite quand h tend vers 0 on a bien $f'(x+T) = f'(x)$.

Exercice 3 [Dérivée symétrique]

1. Pour $h \neq 0$ on écrit :

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a-h)-f(a}{-h}\right.$$

qui tend pour $h \to 0$ vers la moyenne des dérivées à gauche et à droite et f en a (suivant le signe de h, c'est le terme de gauche ou de droite qui donne la dérivée à gauche, et l'autre celui à droite). Donc f admet une dérivée symétrique en a, moyenne des dérivées à gauche et à droite en a.

En particulier, si f est dérivable en a, elle admet une dérivée symétrique.

2. La réciproque est fausse : il suffit de prendre une fonction paire non dérivable (ni à gauche ni à droite) en 0, par exemple $x \mapsto \sqrt{|x|}$ ou $x \mapsto \sin(1/x^2)$ (la dernière n'étant même pas continue en 0).

Exercice 4 [Dérivée et valeur absolue]

1. C'est directement par dérivée d'une composée : la fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée $x \mapsto \mathrm{signe}(x)$. Donc $x \mapsto |f(x)|$ est dérivable en tout x tel que $f(x) \neq 0$, et la dérivée en ce point vaut $f'(x) \cdot \mathrm{signe}(f(x))$.

2. Par développement limité, si a vérifie $f(a) = 0$, alors au voisinage de a on a :

$$|f(x)| \underset{x\to a}{=} |f'(a)(x-a) + \mathrm{o}(x-a)| \underset{x\to a}{=} |f'(a)||x-a| + \mathrm{o}(x-a)$$

qui doit être de la forme $\alpha(x-a) + \mathrm{o}(x-a)$ pour avoir la dérivabilité de $x \mapsto |f(x)|$ en a. Mais on a deux cas :

— $\alpha = 0$ (qui correspond à $f'(a) = 0$) : et dans ce cas on a la dérivabilité ;

— $\alpha \neq 0$: et alors $\alpha(x-a)$ change de signe au voisinage de a, donc $|f(x)|$ aussi, ce qui est impossible.

Donc f est dérivable en a si, et seulement si, $f'(a) = 0$. Et sa dérivée vaut alors 0.

Exercice 5 [Règle de l'Hôpital]

1. Pour un tel x, la fonction $\varphi : t \mapsto g(t)f(x) - f(t)g(x)$ est continue sur $[0;x]$, dérivable sur $]0;x[$, avec $\varphi(0) = 0 = \varphi(x)$: par théorème de Rolle il existe $c \in]0;x[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire $g'(c)f(x) = f'(x)g(x)$ comme $\varphi' : x \mapsto g'(t)f(x) - f'(t)g(x)$.

2. Pour $x \in]0;a[$, notons c_x le c de la question précédente, qui vérifie donc $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. Par encadrement, comme $0 < c_x < x$, on déduit : $\lim\limits_{x\to 0} c_x = 0$. Et par composée : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$.

3. On applique les résultats précédents avec $f : x \mapsto e^x - 1 - x$ et $g : x \mapsto 1 - \cos(x)$ qui sont dérivables avec :

$$f' : x \mapsto e^x - 1 \text{ et } g' : x \mapsto \sin(x)$$

et donc $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{e^x - 1}{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ qui tend vers 1. Donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{1 - \cos(x)} = 1$.

On procède de même pour le second quotient, avec $f : x \mapsto \ln(1+x) - x$ et $g : x \mapsto x^2$ dérivables avec :

$$f' : x \mapsto \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \text{ et } g' : x \mapsto 2x$$

et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \dfrac{-1/2}{1+x} \underset{x\to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}$ qui donne : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 6 [Extrema et points critiques]

Notons $a \in \mathbb{R}$ le lieu de ce point critique. On peut supposer que c'est un minimum local quitte à changer f en $-f$:

— il est strict : par théorème de Rolle, sinon on avait $b \neq a$ tel que $f(a) = f(b)$, alors il existerait un autre point critique ce qui est exclu ; on peut donc noter $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a-\eta; a[\cup]a; a+\eta],\ f(x) > f(a)$$

et en particulier, $f(a + \pm\eta) > f(a)$

— il est global : par l'absurde, s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(b) < f(a)$, alors :

— si $b > a$: par TVI appliqué à f entre $a+\eta$ et b, il existe $c \in]a+\eta; b[\subset]a; b[$ tel que $f(c) = f(a)$;

— si $b < a$: on trouve de même $c \in]b; a[$ tel que $f(c) = f(a)$.

Par théorème de Rolle entre a et c (légitime comme $c \neq a$) il existe un autre point critique que a, ce qui est exclu.

Donc il s'agit bien d'un minimum global strict.

Exercice 7 [Théorème de Darboux]

On considère f dérivable sur I intervalle et $[a; b] \subset I$. Soit α entre $f'(a)$ et $f'(b)$. On pose :

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } \psi : x \mapsto \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

qui sont définies et continues sur $]a; b]$ et $[a; b[$ respectivement, et (par dérivabilité de f en a et b) prolongeables par continuité en a et b en posant $\varphi(a) = f'(a)$ et $\psi(b) = f'(b)$.

Par TVI appliqué à φ et ψ, leurs images sont des intervalles. Mais $\varphi(b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}) = \psi(a)$ donc ces intervalles ont un point commun : leur union est un intervalle.

Mais cet intervalle contient $f'(a) = \varphi(a)$ et $f'(b) = \psi(b)$, donc il contient α. Donc α est de la forme $\varphi(c)$ ou $\psi(c)$ pour $c \in [a; b]$. Et :

— dans le premier cas : $\alpha = \dfrac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(d)$ pour $d \in]a; c[$ par théorème des accroissements finis ;

— dans le second : $\alpha = \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(d)$ pour $d \in]c; b[$ par théorème des accroissements finis.

Dans tous les cas, $\alpha = f'(d)$ pour $d \in [a; b]$ (et même $]a; b[$) ce qui prouve que f vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Si on prend $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \end{cases}$ (qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, mais non $\mathcal{C}^1$), alors f' vérifie le TVI mais n'est pas continue.

Exercice 8 [Rolle "version limites"]

Si f est nulle : le résultat est immédiat (tout c convient).

Sinon : posons $d \in]0;+\infty[$ tel que $f(d) \neq f(0)$. On peut supposer $f(d) > f(0)$ (quitte à changer f en son opposé). Et alors :

— par théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et d, il existe $a \in]0;d[$ tel que $f(a) = \dfrac{f(0)+f(d)}{2}$;

— par définition de la limite en $+\infty$, il existe x_0 tel que $x_0 > d$ et $f(x_0) < \dfrac{f(0)+f(d)}{2}$ (définition avec $\varepsilon = \dfrac{f(d)-f(0)}{2} > 0$) ; puis par théorème des valeurs intermédiaires, il existe $b \in]d;x_0[$ tel que $f(b) = \dfrac{f(0)+f(d)}{2}$.

Par théorème de Rolle entre a et b, il existe bien c tel que $f'(c) = 0$.

Autre méthode (plus jolie) : posons $g : x \mapsto \begin{cases} f(\tan(x)) & \text{si} \quad x \in [0;\pi/2[\\ f(0) & \text{si} \quad x = \pi/2 \end{cases}$ qui est continue sur $[0;\pi/2]$ (par composée, et en utilisant la limite de f en $+\infty$) et dérivable sur $[0;\pi/2[$ par composée avec $g' : x \mapsto (1+\tan^2(x))f'(\tan(x))$. On a de plus $g(\pi/2) = f(0) = g(0)$. Par théorème de Rolle, il existe $a \in]0;\pi/2[$ tel que $g'(c) = 0$ donc il tel a vérifie $f'(\tan(a)) = 0$: $c = \tan(a)$ convient.

Exercice 9 [Ramener l'infini au fini]

Même méthode qu'avant. On applique Rolle au prolongement continu de g sur $[-\pi/2;\pi/2]$.

Et le résultat reste valable si $l = \pm\infty$ en raisonnant avec $\mathrm{Arctan} \circ f \circ \tan$ par exemple (qui ramène la limite infinie en une même limite finie valant $\pm\pi/2$.

Exercice 10 [Avec des dérivées secondes]

Posons $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\exp(x)$. Par combinaison linéaire et produit, φ est dérivable sur $[a;b]$ avec : $\varphi' : x \mapsto (f'(x) - f''(x) + f(x) - f'(x))\exp(x) = (f(x) - f''(x))\exp(x)$.

Mais $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Par théorème de Rolle appliqué à φ entre a et b, il existe $c \in]a;b[$ tel que $\varphi'(c) = (f(c) - f''(c))\exp(c) = 0$, et ainsi $f(c) = f''(c)$.

Exercice 11 [Classe de fonctions]

1. $x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$: $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ donc seul problème de la continuité de la dérivée en 0. Pour $k < n$: $f^{(k)} : x \mapsto \begin{cases} n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ qui est continue en 0 mais avec que $f^{(n-1)} : x \mapsto \begin{cases} n!x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ qui n'est pas dérivable en 0. Donc f est $\mathcal{C}^{n-1}$ et pas n-fois dérivable.
2. $x \mapsto \begin{cases} x^3\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pas de problème hors de 0, et $f(x) = \mathrm{o}(x)$ au voisinage de 0 ce qui donne la dérivabilité avec dérivée nulle en 0) de dérivée : $x \mapsto \begin{cases} x^2(3\ln(x)+1) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$ et par les mêmes arguments cette fonction est encore dérivable, de dérivée : $x \mapsto \begin{cases} x(6\ln(x)+4) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$ qui n'est pas dérivable en 0 (pas possible de faire un dl1 par exemple, ou passer par taux d'accroissement en 0), mais qui est continue (par croissances comparées pour lever le problème en 0). Et donc f est $\mathcal{C}^2$ mais pas trois fois dérivable.
3. $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$: f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (pas de problème hors de 0, et $f(x) = \mathrm{o}(x)$ au voisinage de 0 ce qui donne la dérivabilité avec dérivée nulle en 0) de dérivée : $x \mapsto \begin{cases} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ qui n'est pas continue en 0 (pas de limite). Donc f est dérivable, mais n'est pas $\mathcal{C}^1$.

4. $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$: dérivable sur $\mathbb{R}$ (pas de problème hors de 0, et $f(x) \sim x = x + \mathrm{o}(x)$ au voisinage de 0 ce qui donne la dérivabilité en 0 avec $f'(0) = 1$) et donc la dérivée est : $x \mapsto \dfrac{1}{(1+|x|)^2}$ (c'est la bonne valeur en 1 donc pas besoin de faire une disjonction de cas). Cette fonction est continue, mais pas dérivable en 0 car on a $f'(x) = 1 - 2|x| + \mathrm{o}(x)$ qu'on ne peut pas écrire comme un dl 1 (problème de signe). Donc f est $\mathcal{C}^1$, mais pas deux fois dérivable.

Exercice 12 [Polynômes et exponentielle 1]

On calcule les dérivées successives sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ et on choisit a, b, c pour avoir les mêmes limites en 0. On trouve $c = 1$ (valeur en 0) puis $b = 1$ (dérivée en 0) puis $a = 1/2$ (dérivée seconde en 0). Et ce sont les seules valeurs pour lesquelles la fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$.

Mais elle n'est pas de classe $\ni$, car elle n'est même pas trois fois dérivable, comme $f'' : x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$ n'est pas dérivable en 0 (dérivée nulle à droite, et égale à 1 à gauche en 0)

Exercice 13 [Polynômes et exponentielle 2]

Par récurrence sur le degré du polynôme, on montre que, si f est une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$, alors l'équation $e^x = f(x)$ possède au plus $n+1$ solutions :

- si $n = 0$: f est constante de valeur α et l'équation $\alpha = e^x$ possède une ou aucune solution selon que $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha > 0$, ce qui prouve l'initialisation ;
- hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, si g est polynomiale de degré n, l'équation $g(x) = e^x$ possède au plus $n+1$ solutions. Soit f polynomiale de degré $n+1$. Posons $\varphi : x \mapsto f(x) - e^x$, de sorte que les solutions de $f(x) = e^x$ sont exactement les 0 de φ. Mais, par théorème de Rolle, entre deux zéros de φ il existe un 0 de $\varphi' : x \mapsto f'(x) - e^x$, donc une solution de $f'(x) = e^x$. Par hypothèse de récurrence appliquée à $g = f'$ (qui est bien de degré n), cette équation possède au plus $n+1$ solutions. Donc l'équation $f(x) = e^x$ en possède au plus $n+2$. D'où l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 14 [Rolle généralisé]

On va appliquer le théorème de Rolle aux dérivées successives de f pour construire récursivement une suite finie d'éléments $b_0, \dots, b_n$ tels que :

$$\forall i \in [\![0; n]\!], \ f^{(i)}(b_i) = 0 \text{ et } b_i \in]a; b_{i-1}[$$

(avec l'abus de notation $b_{-1} = +\infty$)

- pour $i = 0$: $b_0 = b$ convient ;
- supposons b_i construit pour $i \in [\![0; n-1]\!]$: la fonction $f^{(i)}$ est dérivable sur $[a; b]$ et vérifie $f^{(i)}(a) = f^{(i)}(b_i) = 0$. Par théorème de Rolle, il existe $d \in]a; b_i[$ tel que $f^{(i+1)}(d) = 0$. Et alors $b_{i+1} = d$ convient.

D'où la construction des b_i.

Et $c = b_n$ convient.

Exercice 15 [Prolongement $\mathcal{C}^\infty$]

1. Par composée : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ donc on la prolonge avec $f(0) = 0$.
2. Par récurrence.
3. Par croissances comparées, on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \lim\limits_{x \to 0} f^{(n)}(x) = 0$. Ce qui donne que f est $\mathcal{C}^n$ pour tout n, donc $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 16 [Fonction convexe croissante]

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe strictement croissante, sa limite est $+\infty$: pour tout $x \geqslant 1$, la courbe de f est au-dessus de sa corde entre 0 et 1, donc :

$$\forall x \geqslant 1,\ f(x) \geqslant x \cdot (f(1) - f(0)) + f(0)$$

et en passant à la limite à droite, on trouve par divergence par minoration : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 17 [Fonction convexe bornée]

On montre la contraposée : si elle n'est pas constante, notons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f(a) \neq f(b)$:

— si $f(a) < f(b)$: comme ci-dessus, on trouve :

$$\forall x \geqslant b,\ f(x) > (x-a) \cdot (f(b) - f(a)) + f(a)$$

et donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (par minoration) donc f n'est pas bornée ;

— si $f(a) > f(b)$: on regarde de l'autre côté :

$$\forall x \leqslant a,\ f(x) > (x-a) \cdot (f(b) - f(a)) + f(a)$$

et donc $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (par minoration) donc f n'est pas bornée ;

ce qui prouve la contraposée.

Exercice 18 [Fonction convexe et asymptotes]

On peut montrer (comme au 16) que : si f n'est pas décroissante, alors elle tend vers $+\infty$. Et donc ici, par contraposée, comme f ne tend pas vers $+\infty$, alors elle est décroissante. Et donc elle est décroissante tendant vers 0 : par limite monotone, 0 est donc sa borne inférieure, donc un minorant, donc f est positive.

Si f est convexe, et $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote de f, alors $g : x \mapsto f(x) - (ax + b)$ est convexe (on retranche une fonction affine, donc concave, à une fonction convexe, ce qui préserve la convexité). Et $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ (par définition d'une asymptote). Donc par le point précédent, g est positive, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x) - (ax + b) \geqslant 0 \text{ donc } f(x) \geqslant ax + b$$

et donc f est bien au-dessus de son asymptote.

Et ce serait pareil en $-\infty$: le résultat repose sur le fait que, si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, alors f est positive (soit en appliquant le résultat précédent à $g : x \mapsto f(-x)$, qui est convexe ; soit en refaisant un calcul assez proche).

Exercice 19 [Minimum d'une fonction convexe]

Soit a un minimum local de f convexe définie sur I (intervalle). Notons $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \cap [a - \eta; a + \eta],\ f(x) \geqslant f(a)$$

Soit $b \in I$. Par exemple si $b > a$. On a alors deux cas :

— si $b \leqslant a + \eta$: alors $b \in [a - \eta; a + \eta]$ donc $f(b) \geqslant f(a)$;

— sinon : alors $a < a + \eta < b$ avec $a, b \in I$ intervalle donc $a + \eta \in I$ donc $f(a + \eta) \geqslant f(a)$. Et par inégalité des pentes :

$$0 \leqslant \frac{f(a+\eta) - f(a)}{\eta} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

et donc $f(b) \geqslant f(a)$.

Le cas $b < a$ se traite de même. Le cas $b = a$ est immediat.

Et finalement pour tout $b \in I$: $f(b) \geqslant f(a)$. Donc f a un minimum global en a.