Feuille d'exercices n^{o}19 : Dérivabilité

Exercice 1 [Calculs de dérivées]

Donner les ensembles de définition, de dérivabilité, et la fonction dérivée des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}$;
2. $x \mapsto (\cos(x))^{\sin x}$;
3. $\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{1-x^2}\right)$;
4. $x \mapsto \ln\sqrt{\dfrac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)}}$;
5. $x \mapsto \mathrm{Arctan}\,(\mathrm{sh}(x))$;
6. $x \mapsto \ln|\tan(x)|$;
7. $x \mapsto \mathrm{Arcsin}(1-x^2)$;
8. $x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$;
9. $x \mapsto \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2 [Symétrie et dérivées]

Que dire de la dérivée d'une fonction paire, impaire ou périodique ?

Exercice 3 [Dérivée symétrique]

Si f est définie sur un intervalle I et $a \in \overset{\circ}{I}$, on définit la dérivée symétrique de f en a comme la limite : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$, sous réserve que cette limite existe et soit finie.

1. Si f dérivable à droite et à gauche en a, montrer qu'elle admet une dérivée symétrique en a.
2. Que dire de la réciproque ?

Exercice 4 [Dérivée et valeur absolue]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Montrer que $x \mapsto |f(x)|$ est dérivable en tout point où f ne s'annule pas, et exprimer sa dérivée.
2. Que dire de la dérivabilité en les points d'annulation de f ?

Exercice 5 [Règle de l'Hôpital]

On considère f, g deux fonctions continues sur $[0,a]$ et dérivables sur $]0,a[$ avec $f(0)=g(0)=0$. On suppose que g et g' ne s'annulent pas sur $]0,a[$.

1. Montrer que pour tout $x \in]0,a[$, il existe $c \in]0,x[$ tel que $g'(c)f(x) = f'(c)g(x)$.
2. En déduire que, si $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.
3. En déduire les limites $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1-x}{1-\cos(x)}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$.

Exercice 6 [Extrema et points critiques]

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, possédant un unique point critique qui est un extremum local. Montrer qu'il s'agit d'un extremum global strict.

Exercice 7 [Théorème de Darboux]

Montrer que, si f est dérivable, alors f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires. En déduire qu'il existe des fonctions non continues qui vérifient le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 8 [Rolle "version limites"]

Soit $f : [0;+\infty[$ dérivable telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 9 [Ramener l'infini au fini]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, qui admet la même limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. Étudier la fonction $g = f \circ \tan$, et en déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 10 [Avec des dérivées secondes]
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable, telle que : $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(c) = f''(c)$ (on pourra utiliser $\varphi : x \mapsto (f(x) - f'(x))\exp(x)$).

Exercice 11 [Classe de fonctions]
Déterminer la classe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $x \mapsto \begin{cases} x^n & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$;
2. $x \mapsto \begin{cases} x^3\ln(x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$;
3. $x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$;
4. $x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$.

Exercice 12 [Polynômes et exponentielle 1]
Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases}$ est de classe (au moins) $\mathcal{C}^2$. Peut-elle être $\mathcal{C}^3$?

Exercice 13 [Polynômes et exponentielle 2]
Soit f une fonction polynomiale. Montrer que l'équation $f(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 14 [Rolle généralisé]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction n-fois dérivable telle que :

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ et } f(b) = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 15 [Prolongement $\mathcal{C}^\infty$]
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall x > 0,\ f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
$$\forall x > 0,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}.$$
3. En déduire que le prolongement continu de f à $\mathbb{R}_+$ est lui-même $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 16 [Fonction convexe croissante]
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe strictement croissante. Que dire de la limite en $+\infty$?

Exercice 17 [Fonction convexe bornée]
Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe bornée est constante.

Exercice 18 [Fonction convexe et asymptotes]
Soit f convexe sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive.
En déduire qu'une fonction convexe est au-dessus de ses asymptotes.

Exercice 19 [Minimum d'une fonction convexe]
Montrer qu'un minimum local d'une fonction convexe est également un minimum global.