Feuille d'exercices n^{o}18 : Applications linéaires

Exercice 1 [Applications linéaires ou non]

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$: linéaire (vérifier les propriétés, ou dire que c'est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$) ; image : $\{(x,y,0),\ x,y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$; noyaux : $\{0\}$ (injective, résoudre le système)
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 1)$: pas linéaire $f(0,0) = (0,0,1) \neq 0$
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x,x,x)$: linéaire (vérifier les propriétés, ou dire que c'est l'application linéaire canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$) ; image : $\{(x,x,x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$; noyau : $\{0\}$ (injective)
4. $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P \mapsto P(1) + P'(1) + P''$: linéaire en vérifiant les propriétés, ou comme somme des applications linéaires $P \mapsto P(1)$ qui est linéaire (évaluation), et $P \mapsto P'(1)$ qui est linéaire (composée de dérivation, linéaire, et d'évaluation, linéaire) et $P \mapsto P''$ (dérivation linéaire qu'on compose avec elle-même) ; image : $\mathbb{K}[X]$; noyau : $\{aX^2 + bX + x \,|\, a,b,c \in \mathbb{K} \text{ et } 5a + 2b + c = 0\}\} = \text{Vect}(X^2 - 5, X - 2)$;
5. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto f' - 3f$: linéaire en vérifiant les propriétés ou comme combinaison linéaire de la dérivation (linéaire) et de id (toujours linéaire) ; image : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (solution d'une équation différentielle) ; noyau : $\{x \mapsto \lambda e^{3x} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x \mapsto e^{3x})$ (solution d'une équation différentielle homogène)
6. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto 2f \cdot f'$: pas linéaire (à cause du produit) : l'image de id est 2id mais l'image de 2id est 8id $\neq 2 \cdot (2\text{id})$
7. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$: linéaire (par linéarité de l'intégrale) ; image : $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$; noyau : $\{0\}$;
8. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$: linéaire (comme au-dessus) ; image : $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$; noyau : $\{0\}$;
9. $\mathbb{R}^\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^\mathbb{N},\ (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$: linéaire (propriétés se vérifient facilement) ; image : tout (on définit un antécédent par récurrence) ; noyau : ensemble des suites constantes ;
10. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^T$: linéaire (linéarité de la transposition) ; image : $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; noyau : $\{0\}$ (bijective, car involutive) ;
11. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto A \cdot M$ (pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée) : linéaire (par bilinéarité du produit matriciel) ; image : matrices dont les colonnes sont combinaisons linéaires des colonnes de A ; noyau : matrices dont chaque colonne est dans le noyau de A.

Exercice 2 [Morphisme d'évaluation]

Linéarité immédiate (vérifier les propriétés).

Noyau : applications qui s'annulent en a (qui est bien un sev de $\mathcal{F}(\Omega, E)$).

Image : E (on peut voir avec les applications constantes par exemple que tout élément de E est une image).

Exercice 3 [Inclusion d'espaces images]

Par double implication :

— si $f(A) \subset f(B)$: montrons l'inclusion. Soit $x \in A + \mathrm{Ker} f$. On pose $x = a + y$ avec $a \in A$ et $y \in \mathrm{Ker} f$.

Alors $f(x) = f(a) \in f(A) \subset f(B)$.

Donc il existe $b \in B$ tel que $f(x) = f(b)$.

Puis $x = b + (x - b)$ avec $b \in B$ et $f(x - b) = f(x) - f(b) = 0$, c'est-à-dire $x - b \in \mathrm{Ker} f$.

Donc $x \in B + \mathrm{Ker} f$.

D'où l'inclusion.

D'où la première implication..

— si $A + \mathrm{Ker} f \subset B + \mathrm{Ker} f$: soit $y \in f(A)$. Posons $a \in A$ tel que $f(a) = y$.

Comme $a \in A \subset A + \mathrm{Ker} f \subset B + \mathrm{Ker} f$, on peut écrire $a = b + x$ avec $b \in B$ et $x \in \mathrm{Ker} f$.

Puis $y = f(a) = f(b + x) = f(b) + f(x) = f(b) \in f(B)$.

Donc $f(A) \subset f(B)$.

D'où l'inclusion.

D'où la réciproque.

Exercice 4 [Image et noyau d'une composée]

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker} g)$: on peut faire par double inclusion, on directement :
$$x \in \mathrm{Ker}(g \circ f) \Leftrightarrow g(f(x)) = 0 \Leftrightarrow f(x) \in \mathrm{Ker} g \Leftrightarrow x \in f^{-1}(\mathrm{Ker}(g)).$$
2. soit $x \in \mathrm{Ker} f$. Alors $f(x) = 0$. Par linéarité de g : $g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
3. On peut faire par double inclusion (avec des quantificateurs) ou directement par manipulation d'ensembles :
$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \{g(f(x)) \,|\, x \in E\} = \{g(y) \,|\, y \in \mathrm{Im} f\} = g(\mathrm{Im} f).$$
4. Soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$. Posons $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x)$. Alors $y = g(f(x)) \in \mathrm{Im} g$.
5. double implication :
   — si$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f$: soit $y \in \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f$: il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $g(y) = 0$. Puis $g \circ f(x) = g(y) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f$ donc $f(x) = 0 = y$ donc $y = 0$. L'autre inclusion est toujours vraie (intersection d'espaces vectoriels) d'où la première implication.
   — si $\mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$: on a déjà l'inclusion de $\mathrm{Ker} f$ dans $\mathrm{Ker}(g \circ f)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$: alors $g \circ f(x) = 0$. Donc $f(x) \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g$ (par définition à chaque fois) donc $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker} f$. D'où la seconde implication.
6. double implication :
   — si $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$: soit $x \in F$. Alors $g(x) \in \mathrm{Im} g = \mathrm{Im}(g \circ f)$ donc il existe $y \in F$ tel que $g(x) = g(f(y))$ puis $x = (x - f(y)) + f(y) \in \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f$ ce qui assure $F \subset \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f$. l'autre inclusion est toujours vérifiée car $\mathrm{Ker} g$ et $\mathrm{Im} f$ sont des sev de F donc leur somme aussi.
   — si $\mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f = F$: on a déjà l'inclusion $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$. Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im} g$: on pose $x \in F$ tel que $y = g(x)$. Et par propriété sur F on écrit $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker}(g)$ et $x_2 \in \mathrm{Im} f$. On pose $x_2 = f(z)$ (par définition) et alors : $y = g(x) = g(x_1) + g(x_2) = 0 + g(f(z)) \in \mathrm{Im}(g \circ f)$ ce qui prouve l'autre inclusion.

Exercice 5 [Image et noyau d'un endomorphisme]

1. par double implication :
   — si $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$:
     — soit $x \in \mathrm{Ker} f$: alors $f(x) = 0$ puis par linéarité : $f^2(x) = f(f(x)) = f(0) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker} f^2$; (inclusion qui n'utilise pas l'hypothèse : cf. exercice 8)
     — soit $x \in \mathrm{Ker} f^2$: alors $f^2(x) = 0$. En posant $y = f(x)$, on a ainsi $y \in \mathrm{Im} f$ (par définition) et $t \in \mathrm{Ker} f$ (car $f(y) = f^2(x) = 0$) donc $y = 0$, donc $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x \in \mathrm{Ker} f$.

   Donc $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$

— si $\mathrm{Ker}f = \mathrm{Ker}f^2$: soit $y \in \mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f$: on pose $y = f(x)$ (par définition de $\mathrm{Im}f$) et on a $f(y) = 0$ (par définition de $\mathrm{Ker}f$). Ainsi $f^2(x) = f(y) = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}f^2 = \mathrm{Ker}f$ donc $f(x) = 0$ donc $y = 0$ ce qui prouve $\mathrm{Im}f \cap \mathrm{Ker}f = \{0\}$ (l'autre inclusion est toujours vraie comme on a une intersection d'espaces vectoriels)

2. On procède de même :
   — si $E = \mathrm{Im}f + \mathrm{Ker}f$:
     — soit $y \in \mathrm{Im}f^2$: on peut écrire alors $y = f^2(x) = f(f(x)) \in \mathrm{Im}f$; donc $\mathrm{Im}f^2 \subset \mathrm{Im}f$ (inclusion qui n'utilise pas l'hypothèse : cf. exercice 8)
     — soit $y \in \mathrm{Im}f$: on peut écrire alors $y = f(x)$ pour $x \in E$. Par hypothèse, on peut écrire $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}f$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}f$. On a alors : $y = f(x) = f(x_1) + 0 = f(x_1)$. Mais $x_1 \in \mathrm{Im}f$ donc on peut écrire $x_1 = f(z)$ pour $z \in E$ et ainsi : $y = f(x_1) = f^2(z) \in \mathrm{Im}f^2$. Donc $\mathrm{Im}f \subset \mathrm{Im}f^2$.

     d'où l'égalité $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$ par double inclusion ;
   — si $\mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$: soit $x \in E$. Alors $f(x) \in \mathrm{Im}f = \mathrm{Im}f^2$ donc il existe $z \in E$ tel que $f(x) = f^2(z)$. Puis $f(x - f(z)) = f(x) - f^2(z) = 0$ donc $x - f(z) \in \mathrm{Ker}f$. Et comme $f(z) \in \mathrm{Im}f$ (par définition) on déduit : $x = f(z) + (x - f(z)) \in \mathrm{Im}f + \mathrm{Ker}f$. Donc $E = \mathrm{Im}f + \mathrm{Ker}f$ (l'autre inclusion est toujours vérifiée comme $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont des sev de E, donc leur somme aussi).

Exercice 6 [Endomorphismes qui commutent]

Pour le noyau : soit $x \in \mathrm{Ker}f$. Montrons que $g(x) \in \mathrm{Ker}f$. On a :

$$f\left(gx)\right) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = g(0) = 0$$

en utilisant la commutativité de f et g, et la linéarité de g. Donc $g(x) \in \mathrm{Ker}f$. Et ainsi : $\mathrm{Ker}f$ est bien stable par g.

Pour l'image : soit $y \in \mathrm{Im}f$. Montrons que $g(y) \in \mathrm{Im}f$. Par définition, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Et ainsi :

$$g(y) = g\left(f(x)\right) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) \in \mathrm{Im}f$$

par commutativité de f et g, et par définition de $\mathrm{Im}f$. Donc $g(y) \in \mathrm{Im}f$. Et ainsi : $\mathrm{Im}f$ est bien stable par g.

Pour $P(g)$, il suffit de voir que $P(g)$ et f commutent. Posons $P = \sum a_i g^i$. Alors :

$$g^i \circ f = g^{i-1} \circ g \circ f = g^{i-1} \circ f \circ g = \cdots = g \circ f \circ g^{i-1} = f \circ g \circ g^{i-1} = f \circ g^i$$

en utilisant l'associativité de la composition, pour faire passer un g de la gauche de f à sa droite (ce qu'on peut aussi montrer par récurrence si on préfère). Et par linéarité de la composition :

$$P(g) \circ f = \left(\sum a_i g^i\right) \circ f = \sum a_i \left(g^i \circ f\right) = \sum a_i \left(f \circ g^i\right) = f \circ \left(\sum a_i g^i\right) = f \circ P(g)$$

donc f et $P(g)$ commutent, et on peut appliquer le résultat précédent, ce qui donne le résultat demandé.

Exercice 7 [Images et noyaux itérés]

1. $\mathrm{Ker}f^k \subset \mathrm{Ker}f^{k+1}$: soit $x \in \mathrm{Ker}f^k$. Alors $f^k(x) = 0$. Puis $f^{k+1}(x) = f\left(f^k(x)\right) = f(0) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}f^{k+1}$.
2. $\mathrm{Im}f^{k+1} \subset \mathrm{Im}f^k$: soit $y \in \mathrm{Im}f^{k+1}$. Posons $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Alors : $y = f^k\left(f(x)\right) \in \mathrm{Im}f^k$.

Exercice 8 [Caractérisation des homothéties]

Si f est une homothétie : notons $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \mathrm{id}$. Alors pour tout $x \in E$: $(x, f(x)) = (x, \lambda x)$ est liée (les vecteurs sont proportionnels).

Réciproquement : si pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée. Si $x \neq 0$, la famille (x) est libre, et la famille $(x, f(x))$ est liée donc il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ (qui dépend de x) tel que $f(x) = \lambda x$. Ce qui légitime de définir l'application :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} E \setminus \{0\} & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \text{l'unique } \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } f(x) = \lambda x \end{array} \right. .$$

On va montrer que φ est constante. Pour cela, soient x, y non nuls. Alors :

— si (x, y) est libre : on a par définition de φ et par linéarité de f :

$$f(x) + f(y) = \varphi(x) \cdot x + \varphi(y) \cdot y = f(x+y) = \varphi(x+y)(x+y) = \varphi(x+y) \cdot x + \varphi(x+y) \cdot y$$

et on a donc deux combinaisons linéaires en x et y qui sont égales. Par liberté, elles sont égales coefficient par coefficient, et donc $\varphi(x) = \varphi(x+y) = \varphi(y)$ donc $\varphi(x) = \varphi(y)$.

— si (x, y) est liée : posons $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $y = \mu \cdot x$. Alors par définition de φ et par linéarité de f :

$$f(y) = \varphi(y) \cdot y = f(\mu \cdot x) = \mu \cdot f(x) = \mu\varphi(x) \cdot x = \varphi(x) \cdot y$$

et comme $y \neq 0$, la famille (y) est libre ce qui veut dire que $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Dans les deux cas $\varphi(x) = \varphi(y)$.

Donc φ est constante : en notant λ son unique valeur, on déduit que :

$$\forall x \in E \setminus \{0\},\ f(x) = \lambda x$$

et comme l'égalité est aussi vraie pour $x = 0$ (on trouve $0 = 0$), on déduit que :

$$\forall x \in E,\ f(x) = \lambda x$$

c'est-à-dire que $f = \lambda \mathrm{id}$ est une homothétie !

Exercice 9 [Composée de projecteurs]

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que :

1. Par double implication :
   — si $\mathrm{Im}p = \mathrm{Im}q$: les rôles de p et q sont symétriques donc il suffit de montrer l'une des égalités.
   Soit $x \in E$. Alors $q(x) \in \mathrm{Im}q = \mathrm{Im}p$ donc $p(q(x)) = q(x)$. Et donc $p \circ q = q$.
   — si ($p \circ q = q$ et $q \circ p = p$) : par symétrie il suffit de montrer une inclusion : soit $x \in \mathrm{Im}p$. Alors $x = p(x) = q \circ p(x) = q\left(p(x)\right) \in \mathrm{Im}q$. Donc $\mathrm{Im}p \subset \mathrm{Im}q$.
2. Par double implication :
   — si $\mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}q$: par symétrie il suffit de montrer l'une des égalités.
   Soit $x \in E$. Alors $(p(x) - x) \in \mathrm{Ker}p = \mathrm{Ker}q$. Donc $q(p(x) - x) = 0$, puis $q \circ p(x) = q(x)$. Donc $q \circ p = q$.
   — si ($p \circ q = p$ et $q \circ p = q$) : par symétrie il suffit de montrer une inclusion.
   Soit $x \in \mathrm{Ker}p$: alors $q(x) = q \circ p(x) = q(p(x)) = q(0) = 0$. Donc $x \in \mathrm{Ker}q$. Donc $\mathrm{Ker}p \subset \mathrm{Ker}q$.

Exercice 10 [Somme de projecteurs]

Comme p, q projecteurs, on a :

$$(p+q)^2 - (p+q) = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 - p - q = p \circ q + q \circ p.$$

ce qui prouve déjà que $p + q$ est un projecteur si, et seulement si, $p \circ q + q \circ p = 0$.

Et ainsi :

— si $p \circ q = q \circ p = 0$: alors $p \circ q + q \circ p = 0 + 0 = 0$ donc $p + q$ est un projecteur ;

— si $p+q$ est un projecteur : alors $p \circ q = -q \circ p$ mais alors en composant par p à gauche et à droite, on obtient :

$$p \circ q = p^2 \circ q = -p \circ q \circ p \text{ et } p \circ q \circ p = -q \circ p^2 = -q \circ p$$

et donc $p \circ q = -p \circ q \circ p = q \circ p = -p \circ q$, donc $p \circ q = q \circ p = 0$.

On détermine l'image et le noyau par double inclusion :

— image :

— soit $x \in \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$: notons $x = p(y) + q(z)$ pour $y, z \in E$. Et alors : $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = p^2(y) + p \circ q(z) + q \circ p(y) + q^2(z) = p(y) + q(z) = x$ en notant que $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $p \circ q = q \circ p = 0$.

— soit $x \in \mathrm{Im}(p+q)$: alors $x = (p+q)(x) = p(x) + q(x) \in \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$; et cette somme est directe car, si $x \in \mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q$, alors $x = p(x) = q(x)$ puis $x = p(q(x)) = 0$ (car $p \circ q = 0$).

D'où l'égalité pour l'image.

— noyau :

— soit $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$: alors $p(x) + q(x) = 0$. En composant avec p et q il vient $p^2(x) + p(q(x)) = 0$ donc $p(x) = 0$ et $q(p(x)) + q^2(x) = 0$ donc $q(x) = 0$ et donc $x \in \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$;

— soit $x \in \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}q$: alors $(p+q)(x) = p(x) + q(x) = 0 + 0 = 0$ donc $x \in \mathrm{Ker}(p+q)$.

D'où l'égalité pour le noyau.

Exercice 11 [Inversibilité unilatérale]

Soient E un espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}$.

1. Par double inclusion à chaque fois :

— $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}f$:

— soit $x \in \mathrm{Ker}f$: alors $f(x) = 0$ puis $g \circ f(x) = g(0) = 0$ (par linéarité) d'où la première inclusion ;

— soit $x \in \mathrm{Ker}g \circ f$: alors $g \circ f(x) = 0$ puis $f(g \circ f(x)) = 0$ (par linéarité) mais $f(g \circ f(x)) = f \circ g \circ f(x) = \mathrm{id} \circ f(x) = f(x)$. Donc $f(x) = 0$, d'où la seconde inclusion.

D'où l'égalité.

— $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}g$:

— soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$: alors il existe $x \in E$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x)) \in \mathrm{Im}g$, d'où la première inclusion ;

— soit $y \in \mathrm{Im}g$: alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ puis $f(y) = f \circ g(x) = x$ donc $y = g(x) = g(f(y)) = g \circ f(y) \in \mathrm{Im}g \circ f$.

D'où l'égalité.

Et pour la dernière inclusion on peut aussi utiliser que $f \circ g = \mathrm{id}$ est surjective, donc f aussi, donc $f(E) = E$, puis $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(f(E)) = g(E) = \mathrm{Im}g$.

2. On montre séparément que la somme est directe et génératrice :

— la somme est directe : soit $x \in \mathrm{Ker}f \cap \mathrm{Im}g$: alors $f(x) = 0$, et il existe $y \in E$ tel que $g(y) = x$. Puis :

$$0 = f(x) = f \circ g(y) = y$$

donc $y = 0$ puis $x = g(y) = 0$ (par linéarité de g) ;

— la somme est génératrice : soit $x \in E$: alors $f(x) = f \circ g \circ f(x) = f(g \circ f(x))$ et par linéarité $f(x - g \circ f(x)) = 0$. Donc $x - g \circ f(x) \in \mathrm{Ker}f$. Et finalement : $x = (x - g \circ f(x)) + g(f(x)) \in \mathrm{Ker}f + \mathrm{Im}g$.

D'où le résultat.

3. On a deux supplémentaires, on cherche une application : ça a de fortes chances d'être un projecteur. On a :

$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ \mathrm{id} \circ f = g \circ f$$

et donc on a bien un projecteur !

Mais $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}g$ donc c'est le projecteur sur $\mathrm{Im}g$ parallèlement à $\mathrm{Ker}f$.

4. On travaille sur les suites. On considère :

$$f : (u_n) \mapsto (u_{n+1}) = (u_1, u_2, \dots) \text{ et } g : (u_n) \mapsto (0, u_0, u_1, \dots)$$

c'est-à-dire que la première dévale les indices de 1 vers la gauche (en supprimant u_0) et la seconde décale les indices de 1 vers la droite (en rajoutant au début la valeur 0). Ces deux applications sont des endomorphismes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (la linéarité est claire, et acquise dans le second cas justement parce que l'on a fixé comme valeur 0 pour le premier terme). Et pour toute suite (u_n) :

$$f \circ g((u_n)) = f\left((0, u_0, u_1, \dots)\right) = (u_0, u_1, \dots) = (u_n) \text{ et } g \circ f((u_n)) = g\left((u_1, u_2, \dots)\right) = (0, u_1, u_2, \dots)$$

ce qui donne bien $f \circ g = \mathrm{id}$, mais $g \circ f \neq \mathrm{id}$ (on a remplacé le premier terme de la suite par 0). Et ce n'est pas surprenant : f n'est pas injective, et son noyau est l'ensemble des suites nulles à partir du rang 1, donc deux éléments ayant même image diffèrent seulement à leur premier terme.

Exercice 12 [Composition double]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

1. On montre séparément que la somme est directe et génératrice :
   — la somme est directe : soit $x \in \mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} g$: alors $g(x) = 0$, et il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. Puis :
   $$x = f(y) = f \circ g \circ f(y) = f \circ g(x) = f(0) = 0$$
   donc $x = 0$, et la somme est directe.
   — la somme est génératrice : soit $x \in E$: alors $g(x) = g \circ f \circ g(x)$ puis par linéarité de g : $g\left(x - f \circ g(x)\right) = 0$, c'est-à-dire que $(x - f \circ g(x)) \in \mathrm{Ker} g$.
   Et ainsi : $x = (x - f \circ g(x)) + f\left(g(x)\right) \in \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f$. Donc la somme est génératrice.

   Et ainsi $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} g$ sont bien supplémentaires dans E.
2. On procède par double inclusion :
   — soit $y \in \mathrm{f}\left(\mathrm{Im} g\right)$: notons $x \in \mathrm{Im} g$ tel que $y = f(x)$. Alors $x \in E$ donc $y = f(x) \in \mathrm{Im} f$, ce qui prouve la première inclusion.
   — soit $y \in \mathrm{Im} f$: notons $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors :
   $$y = f(x) = f \circ g \circ f(x) = f\left(\underbrace{g(f(x))}_{\in \mathrm{Im} g}\right) \in f\left(\mathrm{Im} g\right).$$

   D'où l'égalité par double inclusion.

Exercice 13 [Supplémentaire commun à deux hyperplans]

Montrons déjà le premier résultat.

Si $F = G$: alors $F \cup G = F$ est un hyperplan de E, donc $F \cup G \neq E$

Sinon, montrons que $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel : comme E est un espace vectoriel, cela conclura que $F \uplus G \neq E$. On a déjà montré que, à moins d'être triviale, l'union de deux espaces vectoriels n'est pas un espace vectoriel. Montrons donc que $F \not\subset G$ et que $G \not\subset F$.

Par symétrie des rôles de F et G, il suffit de montrer que $F \not\subset G$.

Par l'absurde, si on avait $F \subset G$: comme $F \neq G$, on peut donc trouver $x \in G \setminus F$. Un tel x n'étant pas dans F, d'après le cours, on a : $E = F \oplus \mathrm{Vect}(x)$. Mais $F \subset G$ et $x \subset G$, donc par somme il vient $E \subset G$, puis $G = E$. D'où la contradiction avec le fait que G est un hyperplan de E.

Et finalement $F \cup G \neq E$. Mais $F \cup G \subset E$ (union de sous-ensembles de E. Donc il existe $x \in E$ tel que $x \notin F \cup G$. Un tel x n'est ni dans F, ni dans G. Et donc $D = \mathrm{Vect}(x)$ est à la fois un supplémentaire de F et de G : c'est un supplémentaire commun à F et G.

Exercice 14 [Détermination d'une forme linéaire]

La famille $((1,1,1),(2,0,1),(1,2,3))$ est une base de $\mathbb{R}^3$, ce qui justifie déjà qu'une telle forme linéaire existe et est unique.

Pour trouver son expression générale, on considère $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$: il suffit d'exprimer (x,y,z) dans la base précédente pour conclure. On a :

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda\\ \mu\\ \nu \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x+5y-4z\\ x-2y+z\\ -x-y+2z \end{pmatrix}$$

(en résolvant le système. Et ainsi pour tous $x,y,z\in\mathbb{R}$:

$$f(x,y,z) = 0\cdot\lambda + 1\cdot\mu + 4\cdot\nu = -x-2y+3z$$

et on vérifie que l'on retrouve bien les trois valeurs initiales.

Autre méthode (plus efficace) : on sait déjà que f est de la forme $f:(x,y,z)\mapsto ax+by+cz$. En utilisant les trois valeurs données, on trouve :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0\\ 2a+c & = & 1\\ a+2b+c & 4 & \end{array}\right.$$

qu'on résout, ce qui donne $a=-1$, $b=-2$ et $c=3$. C'est bien la forme précédente.

Exercice 15 [Forme linéaire sur les polynômes]

On pose $\psi : P\mapsto P(a)$. Alors φ et ψ sont des formes linéaires non nulles.

Mais $\mathrm{Ker}\psi = \{P\in\mathbb{K}[X],\,|\,P(a)=0\} = \{(X-a)P\,|\,P\in\mathbb{K}[X]\}\subset\mathrm{Ker}\varphi$.

Nécessairement, cette inclusion est une égalité : sinon, on pourrait trouver $P\in\mathrm{Ker}(\varphi)\setminus\mathrm{Ker}\psi$, et alors $\mathrm{Vect}(P)$ serait un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\psi$. Puis $E=\mathrm{Ker}(\psi)\oplus\mathrm{Vect}(P)\subset\mathrm{Ker}(\varphi)$ donc $E=\mathrm{Ker}(\varphi)$ puis $\varphi=0$, ce qui est exclu.

Donc $\mathrm{Ker}\varphi=\mathrm{Ker}\psi$: les formes linéaires ψ et φ sont proportionnelles.