Feuille d'exercices n^{o}18 : Applications linéaires

Exercice 1 [Applications linéaires ou non]

Dire si les applications suivantes sont des applications linéaires, et si c'est le cas déterminer leurs noyaux et leur image (qu'on essaiera d'écrire simplement, et dont on donnera une base sinon) :

1. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 0)$;
2. $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-2y, 1)$;
3. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (x,x,x)$;
4. $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X],\ P \mapsto P(1) + P'(1) + P''$;
5. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto f' - 3f$;
6. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto 2f \cdot f'$;
7. $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$;
8. $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \mapsto \left(x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)$;
9. $\mathbb{R}^\mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^\mathbb{N},\ (u_n) \mapsto (u_{n+1} - u_n)$;
10. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto M^T$;
11. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto A \cdot M$ (pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée).

Exercice 2 [Morphisme d'évaluation]

Soit Ω un ensemble, E un espace vectoriel, et $a \in \Omega$. Montrer que l'application

$$\varphi_a : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{F}(\Omega, E) & \to & E \\ f & \mapsto & f(a) \end{array} \right.$$

est une application linéaire de $\mathcal{F}(\Omega, E)$ dans E, et déterminer son image et son noyau.

Exercice 3 [Inclusion d'espaces images]

Soient E, F deux espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Si A, B sont deux sev de E, montrer que :

$$f(A) \subset f(B) \Leftrightarrow A + \mathrm{Ker} f \subset B + \mathrm{Ker} f.$$

Exercice 4 [Image et noyau d'une composée]

Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker} g)$;
2. $\mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker} f$;
3. $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im} f)$;
4. $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im} g$;
5. $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \mathrm{Ker} g \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$;
6. $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g \Leftrightarrow \mathrm{Ker} g + \mathrm{Im} f = F$.

Exercice 5 [Image et noyau d'un endomorphisme]

Soient E un espace vectoriel, et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1. $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$;
2. $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.

Exercice 6 [Endomorphismes qui commutent]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer alors que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$ sont stables par g.

Plus généralement, montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} g$ sont stables par tout endomorphisme de la forme $P(g)$ pour $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exercice 7 [Images et noyaux itérés]

Soient E un espace vectoriel, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$. Comparer :

1. $\mathrm{Ker} f^k$ et $\mathrm{Ker} f^{k+1}$;
2. $\mathrm{Im} f^k$ et $\mathrm{Im} f^{k+1}$.

Exercice 8 [Caractérisation des homothéties]

Soit E un espace vectoriel. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

Exercice 9 [Composée de projecteurs]

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que :

1. $\mathrm{Im} p = \mathrm{Im} q \Leftrightarrow (p \circ q = q$ et $q \circ p = p)$;
2. $\mathrm{Ker} p = \mathrm{Ker} q \Leftrightarrow (p \circ q = p$ et $q \circ p = q)$.

Exercice 10 [Somme de projecteurs]

Soient p, q deux projecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $p+q$ est un projecteur si, et seulement si : $p \circ q = q \circ p = 0$, et qu'alors $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im} p \oplus \mathrm{Im} q$ et $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker} p \cap \mathrm{Ker} q$.

Exercice 11 [Inversibilité unilatérale]

Soient E un espace vectoriel, et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im} g$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} g$.
3. Caractériser $g \circ f$.
4. Donner un exemple pour lequel $g \neq f^{-1}$.

Exercice 12 [Composition double]

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g \circ f = f$.

1. Montrer que $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} g$ sont supplémentaires dans E.
2. Montrer que $f(\mathrm{Im} g) = \mathrm{Im} f$.

Exercice 13 [Supplémentaire commun à deux hyperplans]

Soient F, G deux hyperplans d'un espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G \neq E$, et en déduire qu'il existe un supplémentaire commun à F et G dans E.

Exercice 14 [Détermination d'une forme linéaire]

Donner l'expression générale de l'unique forme linéaire $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ telle que :

$$f(1,1,1) = 0, \ f(2,0,1) = 1 \text{ et } f(1,2,3) = 4$$

et donner une base de son noyau.

Exercice 15 [Forme linéaire sur les polynômes]

Soit $a \in \mathbb{K}$. On considère $\varphi \in (\mathbb{K}[X])^*$ non nulle telle que : $\forall P \in \mathbb{K}[X], \ \varphi((X-a)P) = 0$.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall P \in \mathbb{K}[X], \ \varphi(P) = \lambda P(a)$.