Feuille d'exercices n^{o}16 : Continuité et limites

Exercice 1 [Calculs de limites]

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)e^{\cos(x)} = 0$ (encadrement) ;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}\right) = \dfrac{3}{2}$ (faire avec dl1 de racine ou quantité conjuguée) ;
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x-\sin(x)} = +\infty$ (minoration) ;
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{2}{x}}-2\right) = 3$ (faire avec dl1 de exp) ;
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\sqrt{x+1}\right)-\sin\left(\sqrt{x}\right) = 0$ (quantité conjuguée, ou fait que $|\sin(x)-\sin(y)| \leqslant |x-y|$, ou à écrire comme une intégrale à encadrer) ;
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor} = 0$ (par encadrement : numérateur compris entre $-1/2$ et $1/2$, et dénominateur tendant vers $+\infty$) ;
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+\lfloor x\rfloor}{x-\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor}$ n'existe pas : le numérateur tend vers $+\infty$ mais le dénominateur change de signe. Si $x = n+1/2$ ($n\in\mathbb{N}$) on a $x-\lfloor x+1/2\rfloor = -1/2$ et si $x = n+1/4$ on a $x-\lfloor x+1/2\rfloor = 1/4$;
8. $\lim\limits_{x\to0} \frac{\lfloor x\rfloor}{x}$ n'existe pas : en 0^+ la limite est 0 (car $\lfloor x\rfloor = 0$ pour tout $x\in[0;1[$) et en 0^- la limite est $+\infty$ (car $\lfloor x\rfloor = -1$ pour tout $x\in[-1;0[$) ;
9. $\lim\limits_{x\to0} x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor = 1$ par encadrement ;
10. $\lim\limits_{x\to0} x^2\lfloor\frac{1}{x}\rfloor = 0$ par encadrement, ou opération sur les limites avec la limite précédente ;
11. $\lim\limits_{x\to0} \cos\left(x+\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite.

Exercice 2 [Comportement en l'infini]

Comme f est bornée, alors $x\mapsto f(x+1)-f(x)$ aussi (par inégalité triangulaire), donc $l\in\mathbb{R}$.

Par l'absurde si $l\neq0$: Si $l>0$: pour tout $x>x_0$ on a : $f(x+1)-f(x) > l/2 > 0$ puis pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f(x_0+n) = f(x_0)+\sum_{k=0}^{n-1} f(x_0+k+1)-f(x_0) > f(x_0)+\frac{nl}{2} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$$

donc f ne serait pas bornée : contradiction.

Idem si $l<0$.

Donc $l=0$.

Exercice 3 [Prolongements par continuité]

1. $x\mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$: ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. Seul problème en 0. Et pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $f(x)\leqslant\dfrac{|x|}{1} = |x|$ donc f tend vers 0 en 0 (par encadrement) et est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0)=0$.
2. $x\mapsto \frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-2x-3}$: définie pour x tel que $x-3\neq0$ (c'est-à-dire $x\neq3$) et pour $x^2-2X-3\neq0$ (c'est-à-dire $x\neq-1$ et $x\neq3$). Et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,3\}$:

$$f(x) = \frac{1}{x-3}-\frac{4}{x^2-2x-3} = \frac{x-3}{x^2-2x-3} = \frac{1}{x+1}$$

qui a une limite finie en 3 (à savoir $1/4$) mais pas de limite finie en -1. Donc f est prolongeable par continuité en 3 (avec $f(3)=1/4$) mais pas en -1.

3. $x \mapsto \frac{\ln(4x^2-1)}{\ln(2x-1)}$: définie pour $4x^2-1>0$ et $2x-1>0$, donc pour $2x-1>0$ et $2x+1>0$, c'est-à-dire sur $]\frac{1}{2};+\infty[$. Et pour $x>1/2$:

$$f(x) = \frac{\ln((2x-1)(2x+1))}{\ln(2x-1)} = \frac{\ln(2x-1)}{\ln(2x-1)} + \frac{\ln(2x+1)}{\ln(2x-1)} = 1 + \frac{\ln(2x+1)}{\ln(2x-1)} \underset{x\to 1/2}{\longrightarrow} 1$$

par opérations sur les limites. Donc f est prolongeable par continuité en $1/2$ avec $f(1/2)=1$.

4. $x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$: définie sur $\mathbb{R}^*$. Et :
— en 0^+ pas de limite (l'exponentielle tend vers $+\infty$ et le sinus change infiniment de signe) ;
— en 0^- limite nulle par encadrement (l'exponentielle tend vers 0 et le sinus est borné).
Donc pas de prolongement par continuité, mais un prolongement possible en regardant la limite à gauche.

5. $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$: définie pour $1+x>0$ et $x\neq 0$ donc sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$. On étudie le comportement en -1^+ et en 0 (des deux côtés) :
— en -1^+ : $f(x) = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} +\infty$ (par produit et composée) donc pas de prolongement en -1 ;
— en 0 : $\ln(1+x)\sim x$ donc $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ puis $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} e$ donc f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=e$.

6. $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$: pas définie seulement en 0, mais pas de prolongement par continuité car cos n'a de limite ni en $+\infty$ ni en $-\infty$ (donc pas de limite en 0 par composition)

7. $x \mapsto x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$: même endroit, mais cette fois-ci limite nulle en 0 (par encadrement) donc prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=0$.

8. $x \mapsto \sin(1+x)\ln|1+x|$: non définie seulement en $x=-1$ (à cause du ln). Considérons $x\neq -1$. Posons $x=-1+h$ (de sorte que h tend vers 0 lorsque x tend vers -1). Alors :

$$\sin(1+x)\ln|1+x| = \sin(h)\ln|h| \underset{h\to 0}{\sim} h\ln|h| \underset{x\to -1}{\longrightarrow} 0$$

par croissances comparées : donc f est prolongeable par continuité en -1 en posant $f(-1)=0$.

9. $x \mapsto \frac{\tan(2x)}{\sin(3x)}$: définie en tous les x tels que $\sin(3x)\neq 0$ et $\tan(2x)$ bien définie, donc sur tout $\mathbb{R}$ sauf en les x tels que $2x\equiv \pi/2[\pi]$ ou $3x\equiv 0[\pi]$, c'est-à-dire en les éléments de $\{\pi/4+k\pi/2 \,|\, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{k\pi/3\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$:
— en $\pi/4+k\pi/2$: $\tan(2x)$ tend vers $\pm\infty$ (à gauche et à droite avec des signes différents) mais $\sin(3x)$ est borné (tendant vers $\pm\sqrt{2}/2$ suivant la valeur de k), donc on n'a pas une forme indéterminée, et on a des limites infinies de signe opposé à gauche et à droite (pas de prolongement par continuité) ;
— en $k\pi/3$: si $k\equiv \pm 1$ [3], alors $\sin(3x)$ tend vers 0 mais $\tan(2x)$ tend vers $\pm\sqrt{3}$ donc on obtient la même situation qu'avant (limites infinies, de signe opposé, à gauche et à droite, donc pas de prolongement par continuité). Sinon, on écrit $k=3l$ pour $l\in\mathbb{Z}$ et alors $\tan(2x)$ et $\sin(3x)$ tendent vers 0 en $k\pi/3$. On a une FI qu'on lève par équivalent : posons $x=l\pi+h$ (de sorte que h tend vers 0 lorsque x tend vers $k\pi/3=l\pi$). Alors :

$$\frac{\tan(2x)}{\sin(3x)} = \frac{\tan(2l\pi+2h)}{\sin(3l\pi+3h)} = \frac{\tan(2h)}{(-1)^l\sin(3h)} \underset{h\to 0}{\sim} (-1)^l\cdot\frac{2}{3} \underset{x\to k\pi/3}{\longrightarrow} (-1)^l\cdot\frac{2}{3}$$

et donc f est prolongeable par continuité seulement en les $l\pi$ en posant $f(l\pi)=(-1)^l\cdot\frac{2}{3}$.

10. $x \mapsto \frac{\tan(2x)}{\sin(\pi x)}$: on a quasiment comme au-dessus, sauf que cette fois-ci les points d'annulation de $\tan(2x)$ et de $\sin(\pi x)$ ne sont presque jamais les mêmes, donc on n'a pas de FI, et en tout point où la fonction n'est pas définie elle tend vers $\pm\infty$ avec des signes opposés à gauche et à droite. Le

seul point en lequel on a un prolongement est 0, car c'est le seul point commun d'annulation du numérateur et du dénominateur, et en 0 :

$$\frac{\tan(2x)}{\sin(\pi x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{\pi} \underset{x\to 0}{\to} \frac{2}{\pi}$$

donc f est seulement prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$, et n'est pas définie (et pas prolongeable par continuité) en $\{\pi/4 + k\pi/2 \,|\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{Z}^*$.

Exercice 4 [Fonction continue périodique]

Soit f une telle fonction et notons T sa période :

- pour $x \in \mathbb{R}$, en notant $x = nT + y$ la division euclidienne de x par T, on a $f(x) = f(y)$ donc $f(x) \in f([0;T[) = f([0;T])$ (comme $f(0) = f(T)$) ; donc $f(\mathbb{R}) \subset f([0;T])$.
- comme $[0;T] \subset \mathbb{R}$, on a l'inclusion réciproque, donc $f(\mathbb{R}) = f([0;T])$;
- par théorème des bornes atteintes, la fonction f étant continue sur le segment $[0;T]$, elle y est bornée (et même elle atteint ses bornes), de sorte qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que : $f([0;T]) = [m, M]$;
- et donc $f(\mathbb{R}) = [m; M]$: f est bornée et atteint ses bornes.

On retire une hypothèse à chaque fois :

- id est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas bornée ;
- tan est continue et périodique, mais pas définie sur $\mathbb{R}$, et pas bornée ;
- $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \not\equiv \pi/2 [\pi] \\ \tan(x) & \text{sinon} \end{cases}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique, mais pas continue, et pas bornée.

Exercice 5 [Une fonction continue ?]

La fonction $\sqrt{x}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$, et la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ étant à valeurs dans $[0;1[\subset \mathbb{R}_+$, le problème de continuité ne peut venir que de la partie entière.

Comme la fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue à droite partout, et continue à gauche sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, il suffit de vérifier que la fonction considérée est continue à gauche en les entiers. Mais on va quand même le vérifier des deux côtés :

Soit $n \in \mathbb{Z}$. Posons $x = n + h$ pour $h \in]-1;1[$ et étudions la limite de $f(x)$ pour h tendant vers 0^+ et 0^- (ce qui revient bien à étudier les limites de f en n^+ et n^-) :

- si $h \geqslant 0$: alors $\lfloor x \rfloor = n$ puis :

$$f(x) = n + \sqrt{h} \underset{h\to 0^+}{\to} n = f(n)$$

  donc on a bien la continuité à droite ;
- si $h < 0$: alors $\lfloor x \rfloor = n - 1$ puis :

$$f(x) = n - 1 + \sqrt{h+1} \underset{h\to 0^-}{\to} n - 1 + 1 = n = f(n)$$

  donc on a bien la continuité à gauche.

Et donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 [Continuité et valeur absolue]

Comme f et g ne s'annulent pas sur l'intervalle I, par théorème des valeurs intermédiaires (sa contraposée pour être précis), elles sont de signe constant. On peut donc écrire $f = \varepsilon_1|f|$ et $g = \varepsilon_2|g|$ où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$ (suivant les signes de f et g).

Et alors $f = \varepsilon_1|f| = \varepsilon_1|g| = \varepsilon_1\varepsilon_2 g = \pm g$.

Exercice 7 [Monotonie et continuité]

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons que f est continue en a.

Par limite monotone, comme f est croissante, on a déjà que $\alpha = \lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ et $\beta = \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ et que :

$$\alpha \leqslant f(a) \leqslant \beta$$

On veut montrer que $\alpha = f(a) = \beta$. Il suffit, grâce à l'inégalité précédente, de montrer que $\alpha \geqslant \beta$.

Par opération sur les limites, comme $a \neq 0$, on a :

$$\frac{\alpha}{a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{x} \text{ et } \frac{\beta}{a} = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{x}$$

et par limite monotone appliquée à $x \mapsto f(x)/x$, on a également :

$$\frac{\alpha}{a} \geqslant \frac{f(a)}{a} \geqslant \frac{\beta}{\alpha}$$

et ainsi : $\alpha \geqslant f(a) \geqslant \beta$.

Et finalement $\alpha = f(a) = \beta$: la fonction f est continue en a.

Comme ceci est vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 8 [Une fonction affine]

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(y)\right).$$

On souhaite montrer que f est affine (par une méthode un peu originale) :

1. On va montrer que f est 1/2-périodique : soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+1/2) = f\left(\frac{2x+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(f(2x) + f(1)\right) = \frac{1}{2}\left(f(2x) + f(0)\right) = f\left(\frac{2x}{2}\right) = f(x)$$

   ce qui prouve la périodicité.

2. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle est bornée (voir exercice précédent). Si $x \in \mathbb{R}$, en utilisant que $f(0) = 0$ on trouve :

$$f(x) = f\left(\frac{2x+0}{2}\right) = \frac{1}{2} f(2x)$$

   et par récurrence on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \frac{1}{2^n} f(2^n x)$$

   où le membre de droite tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ (par encadrement, comme f est bornée et que $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0).

   Et donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: f est nulle.

3. Soit f générale comme dans le début de l'énoncé. Posons $b = f(0)$ et $a = f(1) - f(0)$. Alors $g : x \mapsto f(x) - (ax+b)$ vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ g\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) - a\left(\frac{x+y}{2}\right) - b = \frac{1}{2}\left(g(x) + g(y)\right)$$

   et de plus $g(0) = g(1) = 0$. Donc g est nulle. Donc $f : x \mapsto ax + b$ est affine.

Exercice 9 [Limite et valeur absolue]

Comme $|f(x)|$ tend vers $+\infty$, alors par définition $|f(x)|$ (donc $f(x)$) ne s'annule plus à partir d'un certain seuil. Par contraposée du TVI, f est de signe constant à partir de ce seuil. Et donc à partir de ce seuil on a :

— si f est positive : $f(x) = |f(x)|$ qui tend vers $+\infty$;
— si f est négative : $f(x) = -|f(x)|$ qui tend vers $-\infty$.

Exercice 10 [Composée bornée de fonctions continues]

Si g est bornée : alors directement $\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im} f) \subset \mathrm{Im} g$ est borné, donc $g \circ f$ est bornée (et la continuité n'a rien à voir).

Si f est bornée : notons $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Im} f \subset [m, M]$ (seulement une inclusion a priori, les bornes n'ayant pas de raison d'être atteinte). Alors :

$$\mathrm{Im}(g \circ f) = g(\mathrm{Im} f) \subset g([m, M])$$

et on est ramené à l'image d'un segment par une fonction continue, qui est un segment par le théorème des bornes atteintes, et ainsi $g \circ f$ est bornée.

Exercice 11 [Fonction coercive]

On applique la définition avec $A = f(0) + 1$: il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ (nécessairement $x_1 < 0 < x_2$) tels que :

$$\forall x, \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x \leqslant x_1 \Rightarrow f(x) \geqslant f(0) + 1 \\ x \geqslant x_2 \Rightarrow f(x) \geqslant f(0) + 1 \end{cases}$$

et alors le minimum de f sur le segment $[x_1, x_2]$ (qui existe bien par théorème des bornes atteintes) est un minimum global pour f.

Exercice 12 [Continuité et densité]

Soient f, g de telles fonctions. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons que $f(x) = g(x)$.

Grâce par exemple à l'écriture décimale, il existe une suite (x_n) de rationnels qui tend vers x. Par continuité de f et de g, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x) \text{ et } \lim_{n \to +\infty} g(x_n) = g(x).$$

mais f et g coïncident sur $\mathbb{Q}$ donc les suites $(f(x_n))$ et $(g(x_n))$ sont les mêmes (tous les x_n sont rationnels). Donc leur limite aussi. Donc $f(x) = g(x)$.

Donc $f = g$.

La fonction $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ coïncide sur $\mathbb{Q}$ avec la fonction constante de valeur 1 (qui est continue) : si elle était continue, ces deux fonctions seraient égales. Donc $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue.

On peut d'ailleurs montrer qu'elle n'est continue nulle part, mais c'est un autre exercice...

Exercice 13 [Équations fonctionnelles]

On procède à chaque fois par analyse-synthèse : on cherche les fonctions possibles en utilisant la propriété vérifiée. On vérifie que les fonctions trouvées conviennent pour la synthèse.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f(x) = 0$ ou 1. La continuité **partout** impose que f est constante de valeur 0 ou 1. Et de telles fonctions conviennent.
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x^2) = f(x)$: on fixe $x \in \mathbb{R}$; par récurrence on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = f(x^{2^n})$. Et en l'appliquant à $x^{1/2^n}$ on trouve $f(x) = f(x^{1/2^n})$.
   Mais, si $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\lim\limits_{n \to +\infty} x^{1/2^n} = 1$. Par continuité **en** 1 on déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x^{1/2^n}) = f(1)$ et donc $f(x) = f(1)$.
   Si $x \in \mathbb{R}_*$: $f(x) = f(x^2) = f(1)$ (comme $x^2 > 0$).
   Et par continuité de f **en** 0 on déduit $f(0) = f(1)$.
   Donc f est constante.
   Toute fonction constante convient.

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+1}{2}\right) = f(x)$: on considère $x \in \mathbb{R}$. On pose (u_n) la suite arithmético-géométrique définie par : $\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & x \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n+1}{2} \end{array}\right.$. Et la suite (u_n) converge vers 1 (le point fixe, comme $(v_n) = (u_n - 1)$ est géométrique de raison $1/2$ donc tend vers 0). Par continuité de f **en** 1 la suite $(f(u_n))$ tend vers $f(1)$. Mais cette suite est constante, de valeur $f(x)$. Donc $f(x) = f(1)$. Donc f est constante.
   Toute fonction constante convient.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x)+f(y)$: on a déjà vu qu'une telle fonction vérifie : $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) = x \cdot f(1)$. Les fonctions f et $f(1)$id coïncident sur $\mathbb{Q}$ et sont continues : elles sont donc égales. Donc f est linéaire.
   Toute fonction linéaire convient.
5. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(xy) = f(x)f(y)$: si $x \in \mathbb{R}_+$, alors $f(x) = f(\sqrt{x})^2 \geqslant 0$ donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Si $f(a) = 0$ pour un $a > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(ax/a) = f(a)f(x/a) = 0$ donc f est la fonction nulle. Sinon, $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on peut poser $g = \ln \circ f \circ \exp$ qui vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ g(x+y) = \ln\left(f(e^{x+y})\right) = \ln\left(f(e^x e^y)\right) = \ln(f(e^x)f(e^y)) = \ln(f(e^x))+\ln(f(e^y)) = g(x)+g(y)$$

   donc g est linéaire, donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \alpha x$$

   donc pour ce même α :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(e^x) = \exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$$

   donc la restriction de f à $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $x \mapsto \alpha$.
   La continuité de f en 0 impose $\alpha \geqslant 0$.
   On a alors $f(-1)^2 = f(1) = 1$ donc $f(-1) = \pm 1$. Et :
   — si $f(-1) = 1$: $f : x \mapsto |x|^\alpha$ (prolongement pair à $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^\alpha$) ;
   — si $f(-1) = -1$: $f : x \mapsto \left\{\begin{array}{rcl} x^\alpha & \text{si} & x \geqslant 0 \\ -(-x)^\alpha & \text{si} & x < 0 \end{array}\right.$ (prolongement impair à $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^\alpha$, qui impose $\alpha > 0$).

   Et les fonctions qui conviennent sont les fonctions du type ci-dessus (pour $\alpha \geqslant 0$ dans le cas pair et $\alpha > 0$ pour le cas impair), ou les fonctions constantes de valeur 0 ou 1.
6. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \sqrt{f(x)f(y)}$: à cause de la racine, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f\left(\frac{(2x-a)+a}{2}\right) = \sqrt{f(2x-a)f(a)} = 0$$

   donc f est nulle.
   Sinon, f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose $g = \ln \circ f$ qui vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}$$

   donc (par continuité de g) g est affine, donc de la forme $x \mapsto ax+b$.
   Puis f est de la forme $f : x \mapsto e^{ax+b}$ donc de la forme $x \mapsto \lambda e^{\alpha x}$ pour $\lambda > 0$.
   Toutes ces fonctions conviennent, donc les solutions sont ces fonctions, et la fonction nulle.

Exercice 14 [Existence de point fixe]

On pose $g = f - \mathrm{id}$ dont on va montrer qu'elle s'annule, ce qui est équivalent à l'existence d'un point fixe pour f. Par combinaison linéaire, g est continue.

1. si $f : [a,b] \to [a,b]$: on a $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$ donc g s'annule par TVI : f a un point fixe.
2. si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ avec $[a,b] \subset f([a,b])$: posons $c, d \in [a,b]$ tels que $f(c) = a$ et $f(d) = b$. Alors $g(c) = a - c \leqslant 0$ et $g(d) = b - d \geqslant 0$ donc g s'annule entre c et d (donc sur $[a,b]$) par TVI : f a un point fixe.
3. si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ décroissante (et montrer que son point fixe est unique) : g est alors strictement décroissante (somme de f, décroissante, et de $-\mathrm{id}$, strictement décroissante). Par limite monotone, il existe $l_1 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $l_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tels que :
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l_1 \geqslant l_2 = \lim_{x\to+\infty}$$
et par opérations sur les limites :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$
et par continuité de g, g réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans lui-même : 0 possède donc un unique antécédent par g, qui est ainsi l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$.
4. si $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}^+$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1$: on a l'équivalent $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} lx$ donc $g(x) \underset{x\to+\infty}{=} lx - x + \mathrm{o}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (l-1)x$ avec $l - 1 < 0$. Et donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$. Comme $g(0) = f(0) \geqslant 0$, alors g s'annule par TVI donc f a un point fixe.
5. si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et que f^k (pour $k \in \mathbb{N}^*$) a un point fixe. Posons $h = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}} - \mathrm{id} = f^k - \mathrm{id}$. Alors h s'annule en $a \in \mathbb{R}$. Mais par télescopage :
$$0 = h(a) = f^k(a) - a = \left(f^k(a) - f^{k-1}(a)\right) + \left(f^{k-1}(a) - f^{k-2}(a)\right) + \cdots + \left(f^1(a) - a\right) = \sum_{i=0}^{k-1} g(f^i(a))$$
où, comme la somme est nulle, tous les termes ne peuvent être strictement de même signe et donc :
   - s'il y en a un nul (disons $g(f^i(a))$) : alors $f^i(a)$ est un point fixe pour f ;
   - s'il y en a deux de signes opposés (disons $g(f^i(a))$ et $g(f^j(a))$) : alors g change de signe entre $f^i(a)$ et $f^j(a)$, donc s'annule par TVI, donc f possède un point fixe.

Exercice 15 [Formules de la moyenne]

Quitte à tout multiplier par -1, et utiliser la linéarité de l'intégrale, on peut supposer $g \geqslant 0$.
- si $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t = 0$: alors $g = 0$, et tout c convient ;
- sinon : par théorème des bornes atteintes, posons $f([a;b]) = [m, M]$. Et alors pour tout $t \in [a;b]$:
$$m \leqslant f(t) \leqslant M$$
puis :
$$mg(t) \leqslant f(t)g(t) \leqslant Mg(t)$$
et en intégrant entre a et b il vient par croissante de l'intégrale :
$$m \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t \leqslant M \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$
et comme $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t > 0$ (on l'a supposée non nulle, et g est positive) :
$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t}{\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} \leqslant M$$
donc le membre du milieu est un élément de $[m, M] = f([a,b])$: il existe donc $c \in [a,b]$ tel que cette quantité vaut $f(c)$, et on a bien :
$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c) \cdot \int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 16 [Applications contractantes et points fixes]

Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite **contractante** s'il existe $k \in]0;1[$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leqslant k \cdot |x - y|.$$

1. On peut faire par deux méthodes :
   — avec des ε : on vérifie que, peu importe $a \in \mathbb{R}$, pour $\varepsilon > 0$, $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$ convient dans la définition de la continuité en a. Et donc sur $\mathbb{R}$.
   — par encadrement : on fixe $a \in \mathbb{R}$. On a $\lim\limits_{x\to a}|x - a| = 0$ et donc par encadrement : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ donc f est continue en a. Et donc sur $\mathbb{R}$.
2. Soient x, y deux points fixes. Alors :
$$|x - y| = |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$
   et donc $x = y$ comme $k < 1$ (sinon on aurait $|x - y| > 0$ et en divisant on aurait $k \geqslant 1$).
3. Par inégalité triangulaire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|f(x)| = |f(x) - f(0) + f(0)| \leqslant k|x| + |f(0)|$$
   et donc :
   — pour $x > 0$:
$$f(x) - x \leqslant |f(x)| - x \leqslant \underbrace{(k-1)}_{<0} x + |f(0)|$$
   qui tend vers $-\infty$ par majoration ;
   — pour $x < 0$:
$$f(x) - x \geqslant -|f(x)| - x \geqslant -k|x| - |f(0)| - x = \underbrace{(1-k)}_{>0} |x| + |f(0)|$$
   qui tend vers $+\infty$ par minoration.

   Donc φ tend vers $+\infty$ en $-\infty$ et $-\infty$ en $+\infty$: par TVI (une fonction contractante étant continue) elle s'annule.

   Par unicité d'un point fixe de fonction contractante, φ s'annule au plus une fois.

   Donc φ s'annule une unique fois : f possède un unique point fixe !

   On pouvait aussi montrer la stricte monotonie de φ, qui réalise donc une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans lui-même.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$|u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leqslant k|u_n - l|$$
   et par récurrence on déduit :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - l| \leqslant k^n |u_0 - l|$$