Interro n^{o}9

Exercice 1

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$: $A_1^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2A_1$.

   Par récurrence, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $A_1^n = 2^{n-1}A_1 = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$:

   — initialisation : pour $n = 1$, c'est directement l'expression de A_1 (on a même le cas $n = 2$)
   — hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A_1^n = 2^{n-1}A_1$. Alors :

   $$A_1^{n+1} = A_1^n \cdot A_1 = 2^{n-1}A_1 \cdot A_1 = 2^{n-1}A_1^2 = 2^{n-1} \cdot 2A_1 = 2^n A_1 = 2^{n+1-1}A_1$$

   ce qui prouve bien le résultat par récurrence.
   Et finalement :

   $$A_1^n = \left\{ \begin{array}{cll} I_2 & \text{si} & n = 0 \\ \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} & \text{si} & n \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$$

2. $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: $A_2^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   On calcule les puissance de A par binôme : soit $n \in \mathbb{N}$, les matrices I_2 et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ commutent et vérifient $A = I_2 + B$. Par formule du binôme :

   $$A_2^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$$

   (le facteur I_2^{n-k} disparaît dans le produit)
   Mais on a :$B^2 = B$. Et une récurrence immédiate donne : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ B^k = B$.
   Et ainsi :

   $$A_2^n = \underbrace{I_2}_{k=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B}_{k \neq 0} = I_2 + (2^n - 1)B = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

   où on vérifie la cohérence de la formule pour $n \leqslant 2$.

3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$: $A_3^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. On calcule par binôme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices I_2 et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ commutent et vérifient $A = I_2 + B$. Par formule du binôme :

   $$A_3^n = (I_2 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k$$

   Mais on a $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et une récurrence immédiate donne que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

   $$B^k = \left\{ \begin{array}{rll} 2^{k/2}I_2 & \text{si} & k \text{ est pair} \\ 2^{(k-1)/2}B & \text{si} & k \text{ est impair} \end{array} \right.$$

et en réinjectant :

$$A_3^n = \sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} B^k + \sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} B^k = \underbrace{\left(\sum_{\substack{k=0\\k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{k/2}\right)}_{=a_n} I_2 + \underbrace{\left(\sum_{\substack{k=0\\k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^{(k-1)/2}\right)}_{=b_n} B$$

où en fait il y avait une erreur d'énoncé (la matrice aurait dû être $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ dont on vient de voir que les puissances se calculent bien), et on pourrait calculer a_n et b_n mais cela éloigne beaucoup du problème initial qui était de calculer des puissances de matrices. Les calculs se font en reconnaissant des binômes :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_n + \sqrt{2} b_n & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{k/2} = (1+\sqrt{2})^n \\ a_n - \sqrt{2} b_n & = & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{k/2} = (1-\sqrt{2})^n \end{array} \right.$$

et ainsi : $a_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n}{2}$ et $b_n = \dfrac{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}$.

4. $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $A_4^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule par binôme : si $n \in \mathbb{N}$, en posant $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui commute avec I_3 et vérifie $A_4 = I_3 + J$, on a :

$$A_4^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k$$

mais on a : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = 0$, ce qui permet d'arrêter la somme à 2 pour $n \geqslant 2$. Et on a finalement :

$$A_4^n = \left\{ \begin{array}{ccc} I_3 & \text{si} & n = 0 \\ A_4 & \text{si} & n = 1 \\ I_3 + nJ + \binom{n}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si} & n \geqslant 2 \end{array} \right. .$$

5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: $A_5^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On fait comme pour A_4 en écrivant $A_4 = I_3 + J$ pour $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en utilisant que : $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on trouve que : pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_5^n = \left\{ \begin{array}{ccc} I_3 & \text{si} & n = 0 \\ A_5 & \text{si} & n = 1 \\ I_3 + nJ + \binom{n}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2} + n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si} & n \geqslant 2 \end{array} \right. .$$

6. $A_6 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$: $A_6^2 = \begin{pmatrix} 27 & 11 & 11 \\ 11 & 27 & 11 \\ 11 & 11 & 27 \end{pmatrix}$.

On utilise la matrice “Attila” : $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui commute avec $4I_3$ et vérifie $A_6 = U + 4I_3$, et par binôme pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_6^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} U^k \cdot 4^{n-k}$$

mais on a $U^2 = 3U$ et une récurrence immédiate donne : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U^k = 3^{k-1}U$. Et finalement (on sépare le cas $k = 0$ de la somme) :

$$A_6^n = 4^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} \cdot 4^{n-k} \right) U = 4^n I_3 + \frac{7^n - 4^n}{3} U$$

qu'on peut réécrire matriciellement :

$$A_6^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 7^n + 2 \cdot 4^n & 7^n - 4^n & 7^n - 4^n \\ 7^n - 4^n & 7^n + 2 \cdot 4^n & 7^n - 4^n \\ 7^n - 4^n & 7^n - 4^n & 7^n + 2 \cdot 4^n \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On échelonne à chaque fois les matrices pour, ou bien avoir l'inverse, ou montrer la non inversibilité :

1. $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (inversible en tant que matrice triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls) : $P_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (et on retrouve la formule de A_4^n pour $n = -1$).
2. $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: P_2 est inversible avec $P_2^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. $P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$: P_3 est inversible d'inverse : $P_3^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$: P_4 n'est pas inversible. En échelonnant sur les lignes, on obtient successivement les étapes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la dernière matrice n'est clairement pas inversible (elle a une ligne nulle) donc P_4 n'est pas inversible.

Exercice 3

Dans les deux cas, comme on demande non seulement l'inversibilité, mais aussi le calcul de l'inverse, on peut procéder par système ou échelonnage. Pour changer (et c'est en fait un peu plus naturel avec des paramètres, par habitude) on procède plutôt par systèmes :

1. $Q_1 = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$: pour $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{R}$ on a :

$$(S) : Q_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} tx + y + z & = & a \\ x + ty + z & = & b \\ x + y + tz & = & c \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + tz & = & c \\ x + ty + z & = & b \\ tx + y + z & = & a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + tz & = & c \\ (t-1)y + (1-t)z & = & b - c \\ (1-t)y + (1-t^2)z & = & a - tc \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + tz & = & c \\ (t-1)y + (1-t)z & = & b - c \\ (2 - t - t^2)z & = & a + b - (t+1)c \end{array} \right.$$

On termine par disjonction de cas :

- 1er cas : si $2 - t - t^2 = 0$ (c'est-à-dire que $t = -2$ ou $t = 1$) : alors le système n'a pas toujours de solution. Par exemple, pour un tel t, si $a = 1$ et $b = c = 0$, la dernière ligne devient $0 = 1$ qui est toujours fausse.

  Et donc pour $t = 1$ ou $t = -2$ la matrice n'est pas inversible (pour $t = 1$ on retrouve la matrice Attila d'ailleurs, qui n'est pas inversible comme toutes ses colonnes ou lignes sont égales).
- 2nd cas : si $2 - t - t^2 \neq 0$ (c'est-à-dire si $t \neq -2$ et $t \neq -1$) : alors le système est échelonné, et on peut le résoudre. Par remontée, on obtient directement :

$$S \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{(t+1)a - b - c}{t^2 + t - 2} \\ y & = & \dfrac{-a + (t+1)b - c}{t^2 + t - 2} \\ z & = & \dfrac{-a - b + (t+1)c}{t^2 + t - 2} \end{array} \right.$$

  où les rôles de a, b, c peuvent être permutés de manière symétrique à ceux de x, y, z (ce qui est rassurant vue la forme de la matrice).

Conclusion : Q_1 est inversible si, et seulement si, $t \neq 1$ et $t \neq -2$ et pour un tel t :

$$Q_1^{-1} = \frac{1}{t^2 + t - 2} \begin{pmatrix} t+1 & -1 & -1 \\ -1 & t+1 & -1 \\ -1 & -1 & t+1 \end{pmatrix}.$$

2. $Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$: on procède exactement de la même manière. On obtient un système échelonné avec comme pivots 1, 1 et $1 + 2t$. On déduit que Q_2 est inversible si, et seulement si, $t \neq -1/2$, et pour un tel t :

$$Q_2^{-1} = \frac{1}{1 + 2t} \begin{pmatrix} 1 & t & -t \\ -2 & 1 & 2t \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$