Nom :

Interrogation 8

Exercice 1 Soient $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles.

1. (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

2. (v_n) tend vers $-\infty$:

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq B.$$

3. (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :
   — (u_n) est croissante ;
   — (v_n) est décroissante ;
   — la suite $(u_n - v_n)$ tend vers 0.

   Les suites (u_n) et (v_n) convergent alors vers une même limite ℓ, qui est l'unique réel vérifiant :

$$\forall n, m \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_m.$$

   En tant que limite de la suite croissante (u_n) et de la suite décroissante (v_n), on a également :

$$\ell = \sup\{u_n \,|\, n \in N\} = \inf\{v_n \,|\, m \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice 2 Donner l'expression générale de la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 1$.

On a une suite arithmético-géométrique. On cherche d'abord la limite possible. Pour $\ell \in \mathbb{R}$, on a :

$$\ell = 2\ell - 1 \Leftrightarrow \ell = 1$$

et ainsi la suite (v_n) de terme général $u_n - 1$ est géométrique de raison 2. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 2u_n - 2 = 2(u_n - 1) = 2v_n$$

et ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = 2^n v_0 = 2^n \cdot (u_0 - 1) = 3 \cdot 2^n$$

et finalement :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \cdot 2^n + 1$$

Exercice 3 Donner l'expression générale de la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

On a un suite linéaire récurrente d'ordre 2, dont l'équation caractéristique est : $X^2 = 3x - 2$. Ses solutions sont $r_1 = 1$ (solution évidente) et $r_2 = 2$ (par relation coefficients/racines). Comme $r_1 \neq r_2$, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n = \lambda + \mu \cdot 2^n.$$

On a $u_0 = u_1 = 1$, et donc :

$$\begin{cases} 1 &= \lambda + \mu \\ 1 &= \lambda + 2\mu \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda = 1$ et $\mu = 0$.

Et finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1$ (la suite est la suite constante de valeur 1.

Remarque : on pouvait montrer le résultat aussi par récurrence double (sans utiliser la forme générale des suites linéaires récurrentes d'ordre 2).

Exercice 4 On considère $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ définies par le fait que, pour tous i, j pour lesquels cela a un sens : $a_{i,j} = i^j$ et $b_{i,j} = i \cdot j$.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.
2. La matrice A possède autant de colonnes que la matrice B possède de lignes (à savoir 2). Le produit $A \times B$ est bien défini, et est un élément de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ qui vaut :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 10 & 20 & 30 \\ 21 & 42 & 63 \end{pmatrix}$$

De même, la matrice B possède autant de colonnes que la matrice A possède de lignes (à savoir 3). Le produit $B \times A$ est bien défini, et est un élément de $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ qui vaut :

$$B \times A = \begin{pmatrix} 14 & 36 \\ 28 & 72 \end{pmatrix}.$$