Nom :

Interrogation 7

Exercice 1 Soient A, B, C trois ensembles :

1. Donner la définition de "A est inclus dans B".
2. Donner la définition de l'ensemble $\mathcal{P}(A)$, et donner explicitement $\mathcal{P}(A)$ pour $A = \{x \in \mathbb{Z} \,|\, x^2 \leq 1\}$ (on commencera par donner une écriture explicite de A).
3. Donner la définition des ensembles $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \setminus B$.
4. Exprimez autrement les ensembles $A \cup (B \cap C)$ et $A \cap (B \cup C)$.
5. Donner la définition de $A_1, \ldots, A_n$ forme une partition de A et donner un exemple de partition de $\mathbb{R}$.

1. "A est inclus dans B" veut dire que tout élément de A est aussi un élément de B : $\forall x \in A,\ x \in B$.
2. $\mathcal{P}(A)$ est l'ensemble des parties de A, c'est-à-dire que : $B \in \mathcal{P}(A) \Leftrightarrow B \subset A$.
   Ici : $A = \{-1; 0; 1\}$ et $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{-1\}, \{0\}, \{1\}, \{-1, 0\}, \{-1, 1\}\{0, 1\}, \{-1, 0, 1\}\}$.
3. $A \cap B$ est l'ensemble des éléments dans A et dans B
   $A \cup B$ est l'ensemble des éléments dans A ou dans B
   $A \setminus B$ est l'ensemble des éléments dans A mais pas dans B.
4. Par distributivité : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ et $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. $A_1, \ldots, A_n$ forme une partition de A si tous les A_i sont non vides, deux-à-deux disjoints, et que leur union fait A (c'est-à-dire que c'est un recouvrement de A). De manière équivalente, cela revient à dire que tous les A_i sont non vides et que tout élément de A appartient à un et un seul des A_i.
   Les ensembles $\mathbb{R}_+^*, \{0\}, \mathbb{R}_-^*$ forment une partition de $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit A une partie non-vide de $\mathbb{R}$:

1. Donner la définition d'un maximum de A.
2. On suppose A majorée : possède-t-elle nécessairement un maximum ? Si oui, par quel théorème est-ce vrai. Si non, donner un contre-exemple.
3. Donner la définition de la borne inférieure de A.
4. On suppose A minorée : possède-t-elle nécessairement une borne inférieure ? Si oui, par quel théorème est-ce vrai. Si non, donner un contre-exemple.

1. Un maximum de A est un majorant de A qui est un élément de A. C'est-à-dire un élément $M \in A$ tel que : $\forall a \in A,\ a \leq M$.
2. Un ensemble, même majoré ne possède pas nécessairement de maximum. Par exemple $A = [0; 1[$ est majorée (par 1) mais ne possède pas de maximum.
3. La borne inférieure, si elle existe, est le plus grand des minorants de A.
4. Oui : par théorème de la borne supérieure (ou son analogue pour la borne inférieure), toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure.

Exercice 3 Soient E, F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E, F)$.

1. Donner la définition de f est injective, surjective ou bijective.
2. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Dire, de l'image directe ou réciproque de A par f, celle qui a un sens, et en donner sa définition (on précisera si ses éléments sont dans E ou F).
3. Même question avec $B \in \mathcal{P}(F)$.

1. f est :
   — injective si tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E ;
   — surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E ;
   — bijective si elle est les deux : tout élément de F admet exactement un unique antécédent par f dans E.
2. C'est l'image directe de A qui a un sens, et c'est le sous-ensemble de F, noté $f(A)$, défini par :
$$f(A) = \{y \in F \,|\, \exists x \in A,\ f(x) = y\} = \{f(x) \,|\, x \in A\}.$$
3. C'est l'image réciproque de B qui a un sens, et c'est le sous-ensemble de E, noté $f^{-1}(B)$, défini par :
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \,|\, f(x) \in B\}.$$

Exercice 4 On considère $f : x \mapsto \dfrac{x+2}{x-3}$.

Trouver E, F sous-ensembles de $\mathbb{R}$ les plus grands possibles tels que f réalise une bijection de E dans F, et donner sa bijection réciproque.

Notons déjà que f est définie pour $x \neq 3$, donc E est un sous-ensemble de $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+2}{x-3} = y &\Leftrightarrow x + 2 = y(x-3) \text{ car } x - 3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x(1-y) = -2 - 3y \end{aligned}$$

et ainsi on a deux cas :

— si $y = 1$: alors $f(x) = y \Leftrightarrow 0 = -1$ qui est toujours faux, donc 1 ne possède pas d'antécédent ;

— si $y \neq 1$: alors $f(x) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{-2-3y}{1-y}$, donc l'unique antécédent de y par f est $\dfrac{-2-3y}{1-y} = \dfrac{3y+2}{y-1}$.

Et ainsi la fonction f réalise une bijection de $E = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ dans $F = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Sa bijection réciproque est :

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \to & E \\ y & \mapsto & \dfrac{3y+2}{y-1} \end{array} \right. .$$