Nom :

Interrogation 6

Exercice 1

1. Dire que "la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I" revient à dire que f est dérivable sur I, et que f' est continue sur I.
2. Non : la valeur absolue ou la racine carrée sont toutes les deux continues, mais ne sont pas dérivables en 0 (demi-tangente verticale pour la racine carrée, et taux d'accroissement sans limite en 0 pour la valeur absolue).
3. Une fonction dérivable est toujours continue.

Exercice 2 Notons $f : x \mapsto \sin(x)e^{3x}$. Alors $f = \mathrm{Im}(g)$ avec $g : x \mapsto e^{ix}e^{3x} = e^{(i+3)x}$.

Une primitive de g est $x \mapsto \dfrac{1}{i+3}e^{i+3x}$.

Et donc une primitive de f est $x \mapsto \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{i+3}e^{i+3x}\right)$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\frac{1}{i+3}e^{i+3x} = \frac{3-i}{10}e^{i+3x} = \frac{e^{3x}}{10}(3-i)\left(\cos(x) + i\sin(x)\right)$$

et donc une primitive de f est :

$$x \mapsto \frac{e^{3x}}{10}(3\sin(x) - \cos(x)).$$

Exercice 3

1. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)^3}{x}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto \dfrac{1}{4}\ln(x)^4$.
2. $x \mapsto xe^{-x^2}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto -\dfrac{1}{2}e^{-x^2}$
3. $x \mapsto \ln(x)$ a pour primitive sur $\mathbb{R}_+^*$: $x \mapsto x\ln(x) - x$
4. $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto \mathrm{Arctan}(e^x)$.

Exercice 4 1. $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t$, $u = e^t$

Brouillon : $u = e^t$ donc $\mathrm{d}u = e^t\mathrm{d}t$ puis $\displaystyle\frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t = \frac{e^t}{e^t+1}\mathrm{d}u = \frac{u}{1+u}\mathrm{d}u$

Et ainsi :

$$\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2t}}{e^t+1}\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1+u}\mathrm{d}u = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u\right) = [u - \ln(1+u)]_1^2 = 1 - \ln(3) + \ln(2).$$

2. primitive de $t \mapsto \dfrac{\ln(\ln(t))}{t}$, $u = \ln(t)$

Brouillon : $u = \ln(t)$ donc $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ puis $\dfrac{\ln(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t = \ln(u)\mathrm{d}u$.

Et ainsi :

$$\int^x \frac{\ln(\ln(t))}{t}\mathrm{d}t = \int^{\ln(x)} \ln(u)\mathrm{d}u\, [u\ln(u) - u]^{\ln(x)} = \ln(x)\ln(\ln(x)) - \ln(x).$$

C'est-à-dire que $x \mapsto \ln(x)\ln(\ln(x)) - \ln$ est une primitive de $t \mapsto \dfrac{\ln(\ln(t))}{t}$

Exercice 5 La fonction Arcsin est continue sur $[-1;1]$ donc on voudrait expliciter une primitive de Arcsin sur cet intervalle.

Il y a en fait un petit piège ici : on va procéder par intégration par parties, en dérivant Arcsin, ce qui n'est possible que sur $]-1;1[$. Sur $]-1;1[$, Arcsin est bien $\mathcal{C}^1$ et on peut procéder par intégrations par parties, ce que l'on fait directement avec une primitive générique :

Brouillon : $\begin{cases} u = \mathrm{Arcsin}(t) \\ v' = 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\ v = t \end{cases}$

Et ainsi :

$$\int^x \mathrm{Arcsin}(t) = x\mathrm{Arcsin}(x) - \int^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

et on reconnaît une dérivée exacte dans l'intégrale, à savoir la dérivée de $t \mapsto -\sqrt{1-t^2}$, ce qui donne pour primitive :

$$x \mapsto x\mathrm{Arcsin}(x) + \sqrt{1-x^2}.$$