Nom :

Interrogation 5

Exercice 1 Écrire les nombres suivants sous forme algébrique :

1. $\sqrt{2}e^{-3i\pi/4} = \sqrt{2}\cos(-3\pi/4) + i\sqrt{2}\sin(-3\pi/4) = -2 - 2i$
2. $1 + e^{i\theta} = (1 + \cos(\theta)) + i\sin(\theta)$
3. $(1 + i\sqrt{3})^2 = (1 - 3) + 2i\sqrt{3} = -2 - i2\sqrt{3}$
4. $\dfrac{1}{4+3i} = \dfrac{4-3i}{|4+3i|^2} = \dfrac{4-3i}{25} = \dfrac{4}{25} + i\dfrac{-3}{25}$

Exercice 2 Écrire les nombres suivants sous forme trigonométrique :

1. $\sqrt{2}e^{-3i\pi/4} = \sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$ (c'est déjà la forme trigonométrique)
2. $1 + e^{i\theta}$ ($\theta \in]-\pi;\pi[$) : on utilise l'angle moitié :
$$1 + e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$$
qui est bien la forme trigonométrique comme $\theta \in]-\pi;\pi[$ donc $2\cos(\theta/2) > 0$.
3. $(1 + i\sqrt{3})^2 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^2 = 4e^{2i\pi/3}$
ou on pouvait aussi utiliser l'exercice 1. et reconnaître directement la forme trigonométrique de ce qu'on avait trouvé.
4. $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\pi/4}$

Exercice 3 Donner :

— les formule d'Euler : pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\cos(x) = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

— la formule de Moivre : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $\cos(nx) + i\sin(nx) = e^{inx} = (\cos(x) + i\sin(x))^n$.

Exercice 4 Donner sous forme algébrique les racines carrées de $3-4i$: on résout l'équation $(x+iy)^2 = 3-4i$, d'inconnues réelles x, y. On trouve alors (en regardant la partie réelle, la partie imaginaire, et le module) :

$$x^2 - y^2 = 3,\ 2xy = -4 \text{ et } x^2 + y^2 = 5$$

Les équations 1 et 3 donnent $x^2 = 4$, donc $x = \pm 2$, et $y^2 = 1$, donc $y = \pm 1$. La deuxième équation donne que x et y sont de signes opposés, et finalement les racines sont : $\pm(2-i)$.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+i)z^2 - 3z + 2 - i = 0$.

On calcule le discriminant : $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot (2-i) \cdot (1+i) = -3 - 4i$.

Comme dans l'exercice précédent, on recherche les racines par résolution d'un système, ce qui donne pour racines : $\delta = 1 - 2i$ et $-\delta$. Les racines de l'équation sont donc : $\dfrac{3 \pm (1-2i)}{2(1+i)}$, c'est-à-dire :

$$\frac{4-2i}{2+2i} = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{2} = \frac{1-3i}{2} \text{ et } \frac{2+2i}{2+2i} = 1.$$

Remarque : on pouvait aussi voir que 1 est une racine évidente, et par relations coefficients-racines, la seconde racine vaut : $\dfrac{2-i}{1+i} = \dfrac{1-3i}{2}$ (avec nettement moins de calculs...)

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, donner sous forme exponentielle les racines n-èmes de l'unité :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}} \mid k \in [\![0; n-1]\!]\}$$

Exercice 7 Donner sous forme exponentielle les racines cubiques de $1 - i$.

On a l'écriture sous forme exponentielle : $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$. Et ainsi on obtient déjà que $z_0 = \sqrt[6]{2}e^{-i\pi/12}$ est une des racines cubiques cherchées. Les deux autres sont :

$$z_0 j = z_0 e^{2i\pi/3} = \sqrt[6]{2}e^{7i\pi/12} \text{ et } z_0 \overline{j} = z_0 e^{-2i\pi/3} = \sqrt[6]{2}e^{-3i\pi/4}.$$