Nom :

Interrogation 3

Exercice 1 On considère I un sous ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Soit J un sous-ensemble de I : donner la définition de la restriction de f à J.
2. On considère $x_0 \in I$: donner la définition de la dérivabilité de f en x_0. Et donner dans ce cas la valeur de $f'(x_0)$ et l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x_0.
3. On considère $g : K \to \mathbb{R}$.
   (a) À quelle condition $g \circ f$ est-elle bien définie ?
   (b) Donner une condition suffisante pour que $g \circ f$ soit dérivable, et donner sa dérivée.
   (c) Montrer que la condition précédente n'est pas nécessaire.

Réponse :

1. $f|_J : \left\{ \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$
2. f est dérivable en x_0 si, et seulement si la limite $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, et est finie.
   On a alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, et la tangente associée a pour équation : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
3. (a) Il faut que f soit à valeurs dans K, c'est-à-dire que :
   $$\forall x \in I,\ f(x) \in K.$$
   (b) Il suffit que g soit dérivable sur K et que f soit dérivable sur I (et à valeurs dans K). On a alors : $(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$
   (c) Si on prend $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f : x \mapsto x^4$, alors g n'est pas dérivable en 0, donc $g \circ f$ n'est a priori pas dérivable en 0. Mais elle l'est pourtant sur $\mathbb{R}$ comme :
   $$\forall x \in \mathbb{R}, g \circ f(x) = \sqrt{x^4} = x^2$$

Exercice 2 Compléter les formules suivantes :

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{i} x_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} x_{i,j} \right)$$

$$\sum_{i=9}^{n+3} a_i = \sum_{j=2}^{n-4} a_{n+5-j}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 3

1. Donner la formule du binôme :

$$\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

2. Donner la factorisation de $a^n - b^n$:

$$\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ a^n - b^n = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}\right).$$

3. À quelle condition peut-on factoriser $a^n + b^n$? Donner la factorisation dans ce cas : il faut n impair, et alors :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k (-b)^{n-1-k}\right)$$

4. Donner la formule de Pascal :

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 4 Simplifier les quantités suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{i=3}^{n-1} 4i - 5 = \frac{4(n-1) - 5 + 4 \cdot 3 - 5}{2} \cdot (n-3) = \frac{4n-2}{2} \cdot (n-3) = (2n-1)(n-3)$
   où on a reconnu la somme des termes d'une suite arithmétique (de raison 4)
2. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} 5k = 5^n \prod_{k=2}^{n+1} k = 5^n \cdot (n+1)!$
3. $\displaystyle\sum_{j=2}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{2^{n-2}-1}{2-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot (2^{n-2}-1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$
   où on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $2 \neq 1$
4. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n+1} 3^{k-1} = 3^{\sum_{k=2}^{n+1} k-1} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$
   où le produit des puissances devient la puissance par la somme, et on reconnaît une somme arithmétique (de raison 1)
5. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2n)^k = (2n+1)^n$
   par application de la formule du binôme