Nom :

Interrogation 2 : corrigé

Exercice 1 On considère $f : I \to J$, où I, J sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

1. Donner la définition de la bijectivité de f.
2. On considère f bijective, avec f dérivable en $x \in I$. Dire à quelle condition f^{-1} est dérivable en $f(x)$ et donner alors sa dérivée.
3. On considère $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{x-4}$: montrer que f réalise une bijection entre deux ensembles I et J qu'on choisira les plus grands possibles, et donner sa bijection réciproque.

Réponse :

1. f est bijective : tout élément de J admet un unique antécédent par f dans J
2. f^{-1} est dérivable en $f(x)$ si $f'(x) \neq 0$, et alors : $f^{-1\prime}(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
3. La fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons $f(x) = y$ pour $x \neq 4$:

$$\begin{aligned} f(x) &\Leftrightarrow y \Leftrightarrow \frac{x+3}{x-4} = y \\ &\Leftrightarrow x+3 = y(x-4) \Leftrightarrow x(1-y) = -4y-3 \end{aligned}$$

et ainsi : si $y = 1$, alors y n'a pas d'antécédent. Et si $y \neq 1$, son unique antécédent est $x = \dfrac{-4y-3}{1-y}$.

Donc $I = \mathbb{R} \setminus \{4\}$, $J = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $f^{-1} : y \mapsto \dfrac{-4y-3}{1-y}$.

Exercice 2 Donner la définition que la courbe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une asymptote en $+\infty$, et étudier celle (éventuelle) de $x \mapsto \dfrac{2x-3x^3}{2x^2+4}$ en $+\infty$.

Réponse :

La droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ si : $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (ax+b) = 0$.

Cherchons une asymptote. On a pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{2x-3x^3}{2x^2+4} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2x-3x^3}{2x^3+4x} = \frac{-3x^3}{2x^3} \cdot \frac{1-\frac{2}{3x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} = \frac{-3}{2} \cdot \frac{1-\frac{2}{3x^2}}{1+\frac{2}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1} = -\frac{3}{2}.$$

donc s'il y a une asymptote, sa pente est $-\dfrac{3}{2}$.

Et de même, pour $x \neq 0$:

$$\frac{2x-3x^3}{2x^2+4} - \frac{-3x}{2} = \frac{2x-3x^3}{2x^2+4} + \frac{3x}{2} = \frac{2x-3x^3+3x^3+6x}{2x^2+4} = \frac{4x}{2x^2+4} = \frac{\frac{4}{x}}{2+\frac{4}{x^2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{2} = 0$$

et donc l'ordonnée à l'origine est 0.

Et donc la droite d'équation $y = -\dfrac{3}{2}x$ est asymptote en $+\infty$.

Exercice 3 On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de "f est majorée" et sa négation.
2. Donner la définition de "f est strictement décroissante" et sa négation.
3. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(a-x) = b - f(x)$: quelle propriété possède alors la courbe de f ?
4. On considère ici $f : x \mapsto (x-1)^2$ de courbe $\mathcal{C}_f$:
   (a) Dire si f est majorée/minorée ou a un maximum/minimum (sans démonstration).
   (b) Montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

Réponse :

1. f est majorée si : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
   Négation : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M$
2. f strictement décroissante si : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$
   Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R},\ (x < y \text{ et } f(x) \leq f(y))$.
3. La courbe de f possède une symétrie centrale par rapport au point $(a/2, b/2)$.
4. (a) f n'est pas majorée (donc n'admet pas de maximum)
   elle est minorée : elle admet 0 comme minimum, atteint en 1 (et seulement en 1)
   (b) On a : $0 \leq 1$ mais $f(0) = 1 > 0 = f(1)$. Donc f n'est pas croissante.
   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(2-x) = ((2-x)-1)^2 = (1-x)^2 = (x-1)^2 = f(x)$$

ce qui prouve la symétrie demandée.