Nom :

Interrogation 1 : corrigé

Exercice 1 Étant donné x un réel, on souhaite montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0,\ |x| \leq \varepsilon) \Rightarrow x = 0.$$

1. Énoncer la contraposée de la propriété ci-dessus.
2. La prouver.

Réponse :

1. $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |x| > \varepsilon)$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq 0$. Alors $|x| > 0$.
   Posons $\varepsilon = \dfrac{|x|}{2}$. Un tel ε vérifie bien $\varepsilon > 0$ et $|x| > \varepsilon$, ce qui prouve la contraposée.

Exercice 2 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Réponse :
On procède par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

— si $n = 0$; alors $\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0^3 = 0$ et $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{0 \cdot 1}{2}\right)^2 = 0^2 = 0$, ce qui prouve bien l'égalité cherchée pour $n = 0$;

— hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$. Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3 \overset{(HR)}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2}{4} \cdot [n^2 + 4(n+1)] = \frac{(n+1)^2}{4} \cdot \Bigg(\underbrace{n^2 + 4n + 4}_{=(n+2)^2}\Bigg) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\
&= \left(\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

ce qui prouve l'hérédité.

D'où le résultat par récurrence.

Exercice 3 On souhaite montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle.

1. Rappeler la définition d'un intervalle, et de la racine carrée.
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Montrer que la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire que :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}.$$
4. Déduire des questions précédentes que $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle.

Réponse :

1. Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle s'il est non vide et que : $\forall a, b \in I,\ [a, b] \subset I$.
   Étant donné $x \in \mathbb{R}_+$, la racine carrée de x, notée $\sqrt{x}$, est l'unique réel positif ou nul dont le carré vaut x, c'est-à-dire que : $\sqrt{x} \geq 0$ et $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
2. Raisonnons par l'absurde : supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Écrivons alors $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$ sous forme irréductible, c'est-à-dire que $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$ et a, b sans diviseur commun non trivial.
   En élevant au carré, il vient : $a^2 = 2b^2$ est pair, donc a est pair. Notons $a = 2n$, pour $n \in \mathbb{Z}$.
   En réinjectant, on déduit : $b^2 = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{4n^2}{2} = 2n^2$ est pair, donc b est pair.
   D'où la contradiction, car alors a et b sont divisibles par 2.
   Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.
3. Procédons par contraposée. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sqrt{x} > \sqrt{y}$.
   Alors $0 \leq \sqrt{y} < \sqrt{x}$ (comme un racine est positive), et en multipliant cette inégalité par elle-même (légitime comme tout est positif), il vient : $0 \leq \underbrace{(\sqrt{y})^2}_{=y} < \underbrace{(\sqrt{x})^2}_{=x}$, donc $y < x$.
   Ce qui prouve bien la contraposée.
   D'où la croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$.
4. On a déjà que $1 = \dfrac{1}{1}, 2 = \dfrac{2}{1} \in \mathbb{Q}$.
   Comme $1 \leq 2 \leq 4$, on déduit de la question 3 que : $\sqrt{1} \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{4}$, c'est-à-dire que $1 \leq \sqrt{2} \leq 2$. Et donc $\sqrt{2} \in [1; 2]$.
   Mais par la question 2 : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Donc $[1; 2] \not\subset \mathbb{Q}$.
   Et donc $\mathbb{Q}$ n'est pas un intervalle.