Nom :

Interrogation 17

Exercice 1 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner (sous forme de somme) les développements limités en 0 de cos(x) à l'ordre $2n$, $\mathrm{sh}(x)$ à l'ordre $2n+1$ et $\ln(1+x)$ à l'ordre n.

2. Donner le développement limité de $\ln(\sin(x))$ en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 2.

1. On a directement les formules du cours :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}), \quad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}(x^n)$$

2. On pose $x = \frac{\pi}{2} + h$ avec h qui tend vers 0. On a :

$$\sin(x) = \sin(\pi/2 + h) = \cos(h) \underset{h\to 0}{=} 1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)$$

et en composant avec ln :

$$\ln(\sin(x)) = \ln(\cos(h)) \underset{h\to 0}{=} \ln(1 - \frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)) = -\frac{h^2}{2} + \mathrm{o}(h^2)$$

et finalement :

$$\ln(\sin(x)) \underset{x\to \pi/2}{=} -\frac{(x-\pi/2)^2}{2}.$$

Exercice 2 1. Soit f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \int_{2x}^{x^2} f(t)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^4}{4!}$.

3. Déterminer la limite de : $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1. On pose F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = F(x^2) - F(2x)$$

et donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition et combinaison linéaire avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = 2xf(x^2) - 2f(2x).$$

Nom :

2. On considère la fonction sin qui est infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\sin' = \cos,\ \sin'' = -\sin,\ \sin^{(3)} = -\cos,\ \sin^{(4)} = \sin$$

et en particulier : $|\sin^{(4)}| \leq 1$. Par inégalité de Taylor-Lagrange appliquée entre 0 et x à sin, à l'ordre 4, on a donc :

$$\left|\sin(x) - x + \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^4}{4!}$$

en reconnaissant dans la valeur absolue l'écart entre $\sin(x)$ et son développement de Taylor en 0 à l'ordre 3.

3. Par changement d'indice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$

et on reconnaît une somme de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} \int_0^1 \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(2)$$

donc u_n tend vers $\ln(2)$.

Exercice 3 On considère un sachet de 100 Dragibus dont : la moitié sont jaunes, 30% sont verts, et les autres sont rouges.

1. Combien de bonbons de chaque type y a-t-il dans le paquet ?
2. On tire deux bonbons que l'on mange : quelle est la probabilité que les deux bonbons soient de la même couleur ?
3. On renverse une partie du paquet : trois verts, deux jaunes et cinq rouges tombent par terre, que l'on remet dans le paquet :
   (a) Quelle est la probabilité de tirer un bonbon tombé par terre ?
   (b) On mange un bonbon tiré au hasard : sachant qu'il était tombé par terre, quelle est la probabilité qu'il soit jaune, vert ou rouge ?

1. Il y a 50 bonbons jaunes et 30 verts. Les autres sont rouges, et sont donc au nombre de 20.
2. Tirer deux bonbons de même couleur revient à tirer deux rouges, deux jaunes ou deux verts. Ces trois événements sont incompatibles, et donc la probabilité de tirer deux bonbons de même couleur est la somme des probabilités de tirer deux rouges, deux jaunes ou deux verts. On suppose que les Dragibus sont indiscernables :
   — pour tirer deux jaunes : par formules des probabilités composées, on a directement une probabilité de : $\frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$;
   — pour les rouges : de même on a une probabilité de : $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} = \frac{19}{495}$
   — pour les verts : de même on a une probabilité de : $\frac{30}{100} \cdot \frac{29}{99} = \frac{29}{330}$
   Et en additionnant, on trouve une probabilité de :
   $$\frac{49}{198} + \frac{19}{495} + \frac{29}{330} = \frac{37}{99}$$
   (une très jolie probabilité, il est bon de le souligner)
3. (a) Il y a 10 bonbons tombés par terre, donc une probabilité de $\frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ de tirer un bon qui était tombé par terre.
   (b) On note respectivement J, V, R, T les événements que le bonbon pris est jaune, vert, rouge, tombé. On a directement par dénombrement :
   $$\mathbb{P}_T(J) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},\ \mathbb{P}_T(V) = \frac{3}{10},\ \mathbb{P}_T(R) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$