Nom :

Interrogation 16

Exercice 1 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner (sous forme de somme) les développements limités en 0 de cos(x) à l'ordre $2n$, $\text{Arctan}(x)$ à l'ordre $2n+1$, $\exp(x)$ à l'ordre n et $\ln(1+x)$ à l'ordre n.

2. Donner le développement limité de $\exp(x^2)$ en 3 à l'ordre 2.

1. On a directement les formules du cours :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \text{o}(x^{2n}), \quad \text{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \text{o}(x^{2n+1})$$

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \text{o}(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \text{o}(x^n)$$

2. On pose $x = 3+h$, avec h qui tend vers 0. On a :

$$\begin{aligned}
\exp(x^2) &= \exp((3+h)^2) = \exp(9+6h+h^2) = e^9 \cdot e^{6h+h^2} \\
&\underset{h\to 0}{=} e^9 \left(1 + (6h+h^2) + \frac{(6h)^2}{2} + \text{o}(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} e^9 + 6e^9 h + 19e^9 h^2 + \text{o}(h^2) \\
&\underset{x\to 3}{=} e^9 + 6e^9(x-3) + 19e^9(x-3)^2 + \text{o}((x-3)^2)
\end{aligned}.$$

Exercice 2 On considère deux dés à 6 faces : un équilibré, et un truqué qui ne fait que des 6. On choisit au hasard un dé, puis on le lance.

1. Quelle est la probabilité de faire un 6 ?
2. On fait un 4 : quelle est la probabilité que le dé choisi soit le dé truqué ?
3. On fait un 6 : quelle est la probabilité que le dé choisi soit le dé truqué ?

1. On note A l'événement "le lancé est avec le premier dé", B l'événement "le lancé est avec le second dé", et pour $i \in \{1, \ldots, 6\}$, on note C_i l'événement "le montant est i". Par formule des probabilités totales associée au système complet d'événements (A, B), la probabilité cherchée vaut :

$$\mathbb{P}(C_6) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(C_6) + \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}_B(C_6) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{7}{12}$$

2. Ici, pas besoin de se prendre la tête : le dé truqué ne faisant que des 6, si on fait un 4, c'est qu'on a tiré le dé non truqué. La probabilité cherchée est donc nulle.
3. On utilise la formule de Bayes. On cherche à calculer $\mathbb{P}_{C_6}(B)$. On a :

$$\mathbb{P}_{C_6}(B) = \frac{\mathbb{P}_B(C_6) \cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(C_6)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

Exercice 3 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_3[X]$ donné par $f : P \mapsto X \cdot P + (1-X)P'$.

Remarque : erreur d'énoncé, qui faisait que l'application considérée n'était clairement pas un endomorphisme comme n'étant pas à valeur dans $\mathbb{R}_3[X]$. L'application qu'il fallait considérer était $P \mapsto P + (1-X)P'$. Les premières questions en devenaient beaucoup plus facile, tandis que la dernière en devenait fausse.

1. Donner le noyau de f et en donner une base.
2. Quel est le rang de f ?
3. Donner l'image de f et en donner une base.
4. Montrer que $\text{Im}f$ et $\text{Ker}f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Version avec l'erreur d'énoncé :

1. On raisonne sur les degrés. Si $P \in \text{Ker}f$, alors $XP = (X-1)P'$. Et on a : $\deg(XP) = \deg(P) + 1$ et $\deg((X-1)P') \leq \deg(P)$. Et donc le seul élément du noyau est le polynôme nul : $\text{Ker}f = \{0\}$.
2. Par théorème du rang, on déduit que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \text{rg}(f) + \dim\text{Ker}f = \text{rg}(f)$. Donc $\text{rg}(f) = 4$.
3. Pour l'image, on considère l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a :
$$\text{Im}f = \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \text{Vect}(X, X^2-X+1, X^3-2X^2+2X, X^4-3X^3+3X^2)$$
où la dernière famille est bien une base : on peut constater qu'elle est libre (famille de polynômes non nuls de degrés distincts), ou plus simplement constater qu'elle a pour cardinal la dimension de $\text{Im}f$ (calculé juste avant).
4. Cette question est fausse car les espaces considérés ne sont pas des sous-espaces de $\mathbb{R}_3[X]$. On peut en revanche voir qu'ils sont en somme directe : comme $\text{Ker}f = \{0\}$, on a directement : $\text{Im}f \cap \text{Ker}f = \{0\}$.

Version sans l'erreur d'énoncé :

1. On raisonne aussi sur les degrés.
   — si P est constant : $f(P) = 0 \Leftrightarrow P = (X-1)P' = 0$ donc seul le polynôme nul est un polynôme constant du noyau ;
   — si P est non constant : si $f(P) = 0$, alors $P = (X-1)P'$ donc P et P' ont même coefficient dominant. Ce qui impose que $\deg(P) = 1$. Réciproquement, si $P = aX + b \in \mathbb{R}_1[X]$, alors :
   $$f(P) = 0 \Leftrightarrow aX + b = a(X-1) \Leftrightarrow b = -a$$
   et finalement : $\text{Ker}f = \{a(X-1) \mid a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(X-1)$. Et on a bien une base (comme une famille constituée d'un vecteur non nul est libre).
2. Par théorème du rang, on déduit que $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \text{rg}(f) + \dim\text{Ker}f = \text{rg}(f) + 1$. Donc $\text{rg}(f) = 3$.

3. Pour l'image, on considère l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a :

   $$\mathrm{Im}f = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2), f(X^3)) = \mathrm{Vect}(1, 1, -X^2+2X, -2X^3+3X^2) = \mathrm{Vect}(1, -X^2+2X, -2X$$

   en retirant le premier vecteur (qui apparaît deux fois).

   Et la dernière famille est bien une base : on peut constater qu'elle est libre (famille de polynômes non nuls de degrés distincts), ou plus simplement constater qu'elle a pour cardinal la dimension de $\mathrm{Im}f$ (calculé juste avant).

4. Le théorème du rang assure déjà que $\dim\mathrm{Im}f + \dim\mathrm{Ker}f = 4 = \dim\mathbb{R}_3[X]$. Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, il suffit de voir (de manière équivalente) que leur somme engendre $\mathbb{R}_3[X]$, ou qu'ils sont en somme directe.

   Montrons le côté générateur : on a calculé des bases de $\mathrm{Ker}f$ et de $\mathrm{Im}f$, ce qui donne :

   $$\mathrm{Im}f+\mathrm{Ker}f = \mathrm{Vect}(1, -X^2+2X, -2X^3+3X^2)+\mathrm{Vect}(X-1) = \mathrm{Vect}(1, -X^2+2X, -2X^3+3X^2, X-1)$$

   où la dernière famille est une famille libre (polynômes non nuls de degrés distincts) de cardinal 4 dans $\mathbb{R}_3[X]$ (de dimension 4) : c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$, et donc une famille génératrice, ce qui prouve bien que $\mathrm{Im}f$ et $\mathrm{Ker}f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

   Remarque : on utilise en fait que la concaténation de deux bases forme une base de la somme, ce qui est la caractérisation d'une somme directe.