Nom :

Interrogation 15

Exercice 1 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner (sous forme de somme) les développements limités en 0 de ch(x) à l'ordre $2n$, $\sin(x)$ à l'ordre $2n+1$ et $\dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre n.

2. Donner le développement limité de $\sqrt{x}$ en 3 à l'ordre 2.

1. On a directement les formules du cours :

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}), \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

2. On se ramène au développement en 1, qui est : $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$. En posant $x = 3+h$, on a :

$$\sqrt{x} = \sqrt{3+h} = \sqrt{3}\sqrt{1+\frac{h}{3}} \underset{h\to 0}{=} \sqrt{3}\left(1 + \frac{h}{6} - \frac{h^2}{72} + \mathrm{o}(h)\right)$$

$$\underset{h\to 0}{=} \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}h - \frac{\sqrt{3}}{72}h^2 + \mathrm{o}(h^2) \underset{x\to 3}{=} \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}(x-3) - \frac{\sqrt{3}}{72}(x-3)^2 + \mathrm{o}((x-3)^2)$$

Exercice 2 On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^*$ boules indiscernables, et on tire $p \in \mathbb{N}^*$ boules. Donner le nombre de tirages dans les cas suivants :

1. Les tirages se font sans remise sans tenir compte de l'ordre.
2. Les tirages se font sans remise en tenant compte de l'ordre.
3. Les tirages se font avec remise sans tenir compte de l'ordre.
4. Les tirages se font avec remise en tenant compte de l'ordre.

C'est directement un résultat donné dans le cours. Seul le pénultième protocole sort un peu de l'ordinaire, mais avait été donné en TD. On trouve respectivement $\binom{n}{p}$, A_n^p, $\binom{p}{n+p-1}$ et n^p tirages pour les quatre protocoles.

Exercice 3 On considère $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

1. Donner la définition de $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements.
2. Donner, pour un événement B, la formule des probabilités totales associée au système complet $(A_1, \ldots, A_n)$.
3. Soient A, B deux événements de probabilité non nulle. Donner la formule de Bayes associée à A et B.

1. La famille $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements s'ils sont deux-à-deux incompatibles et que leur union fait Ω (autre formulation : c'est un recouvrement disjoint de Ω).
2. On a directement la formule :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B)$$

   avec la convention que $\mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}_{A_i}(B) = 0$ dès que $\mathbb{P}(A_i) = 0$ (sinon la probabilité conditionnelle n'est pas proprement définie).
3. Avec les notations, on a :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exercice 4 On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par $f : P \mapsto X \cdot P''$.

1. Donner le noyau de f.
2. Donner une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son image par f. En déduire l'image de f.

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$P \in \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow f(P) = XP'' = 0 \Leftrightarrow P'' = 0 \Leftrightarrow \deg(P) < 2$$

   et donc $\mathrm{Ker} f = \mathbb{R}_1[X]$.
2. On considère comme base de $\mathbb{R}_n[X]$ sa base canonique : $(1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, X^n)$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on a :

$$f(X^k) = 0 \text{ si } k < 2 \text{ et } f(X^k) = k(k-1)X^{k-1} \text{ sinon.}$$

   On sait que l'image d'une base par f engendre l'image de f. Ainsi, la famille :

$$(0, 0, 2X, 6X^2, \ldots, (n-1)(n-2)X^{n-2}, n(n-1)X^{n-1})$$

   engendre $\mathrm{Im} f$. Les deux premiers vecteurs ne contribuent pas à l'image (ils sont nuls). Les autres forment une famille libre (polynômes non nuls de degrés distincts). Et on a :

$$\mathrm{Im} f = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^{n-1}) = \{P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \,|\, P(0) = 0\}.$$