Nom :

Interrogation 14

Exercice 1 1. On a directement les formules du cours :

$$\cos(x) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\mathrm{o}(x^{2n}),\quad \mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)}+\mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) \underset{x\to0}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\mathrm{o}(x^n)$$

2. On pose $x=4+h$, et on s'intéresse à $\ln(x)=\ln(4+h)$ pour h tendant vers 0. On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln(x) &= \ln(4+h)=\ln(4(1+h/4))=\ln(4)+\ln(1+h/4)\\
&\underset{h\to0}{=} \ln(4)+(h/4)-\frac{(h/4)^2}{2}+\frac{(h/4)^3}{3}+\mathrm{o}(h^3)\\
&\underset{h\to0}{=} \ln(4)+\frac{h}{4}-\frac{h^2}{32}+\frac{h^3}{192}+\mathrm{o}(h^3)\\
&\underset{x\to4}{=} \ln(4)+\frac{(x-4)}{4}-\frac{(x-4)^2}{32}+\frac{(x-4)^3}{192}+\mathrm{o}(h^3)
\end{aligned}$$

et on ne développe surtout pas les puissances de $(x-4)$.

3. On utilise le développement limité de $\cos(x)$ en 0. On a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\cos(x)} &\underset{x\to0}{=} \sqrt{2-\frac{x^2}{2}+\mathrm{o}(x^3)} \underset{x\to0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1-\frac{x^2}{4}+\mathrm{o}(x^3)}\\
&\underset{x\to0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{4}+\mathrm{o}(x^3)\right)-\frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{4}+\mathrm{o}(x^3)\right)^2+\mathrm{o}\left(\left(-\frac{x^2}{4}+\mathrm{o}(x^3)\right)^2\right)\right)\\
&\underset{x\to0}{=} \sqrt{2}\left(1-\frac{x^2}{8}+\mathrm{o}(x^3)\right) \underset{x\to0}{=} \sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}x^2+\mathrm{o}(x^3)
\end{aligned}$$

et au passage on trouve un résultat cohérent avec la parité de la fonction $x\mapsto\sqrt{1+\cos(x)}$.

4. Pour $\tan(x)$, on a directement dans le cours :

$$\tan(x) \underset{x\to0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)$$

On déduit que :

$$\tan'(x)=1+\tan^2(x) \underset{x\to0}{=} 1+\left(x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}(x^3)\right)^2 \underset{x\to0}{=} 1+x^2+\frac{2x^4}{3}+\mathrm{o}(x^4)$$

et par primitive :

$$\tan(x) \underset{x\to0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\mathrm{o}(x^5)$$

qu'on réinjecte pour obtenir :

$$\tan'(x) = 1+\tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1+\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\mathrm{o}(x^5)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1+x^2+\frac{2x^4}{3}++\frac{17x^6}{45}\mathrm{o}(x^6)$$

et à nouveau par primitive :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}\mathrm{o}(x^7)$$

Exercice 2 Soit $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+2y+3z=0\}$

1. On a directement $H = \mathrm{Ker}\varphi$, où :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & x+2y+3z \end{array} \right.$$

qui est bien une forme linéaire non nulle (de la forme $(x,y,z) \mapsto ax+by+xz$ avec a,b,c non tous nuls).

2. On résout l'équation satisfaite par les éléments de H, en utilisant x comme pivot et y,z comme paramètres, ce qui donne :

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x = -2y-3z\} = \{(-2y-3z, y, z) \,|\, y,z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

où la famille considérée est bien une base : elle est génératrice par construction, et elle est libre en tant que famille constituée de deux vecteurs non colinéaires (ils ont des 0 à des coordonnées différentes).

3. D'après le cours, on sait déjà que l'on a l'équivalence :

$$\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathrm{Vect}(u) \Leftrightarrow u \notin H$$

et ainsi on a ici :

$$\mathbb{R}^3 = H \oplus \mathrm{Vect}((a,b,c)) \Leftrightarrow (a,b,c) \notin H \Leftrightarrow a+2b+3c \neq 0$$

4. (a) On cherche $h \in H$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que : $(x,y,z) = h + \lambda u$. Une telle écriture existe bien, comme $u \notin H$.
En appliquant la fonction φ précédente, on a nécessairement :

$$\varphi(x,y,z) = x+2y+3z = \varphi(h) + \varphi(\lambda u) = 0 + 6\lambda$$

et donc nécessairement $\lambda = \dfrac{x+2y+3z}{6}$ et $h = (x,y,z) - \lambda u$.
Et ainsi, pour cette valeur de λ :

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}x-\lambda\\y-\lambda\\z-\lambda\end{pmatrix}}_{\in H} + \underbrace{\begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\\\lambda\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Vect}(u)} = \underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{5x-2y-3z}{6}\\\dfrac{-x+4y-3z}{6}\\\dfrac{-x-2y+3z}{6}\end{pmatrix}}_{\in H} + \underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{x+2y+3z}{6}\\\dfrac{x+2y+3z}{6}\\\dfrac{x+2y+3z}{6}\end{pmatrix}}_{\in \mathrm{Vect}(u)}$$

(b) Si on note s cette symétrie, alors avec les notations précédentes on a :

$$s(x, y, z) = h - \lambda u = (x, y, z) - 2\lambda u$$

et donc en remplaçant λ et h par leur valeur :

$$s\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2x - 2y - 3z}{3} \\ \dfrac{-x + y - 3z}{3} \\ \dfrac{-x - 2y}{3} \end{pmatrix}$$

Et on peut vérifier que l'on a bien $s \circ s = \mathrm{id}$ et que s agit comme id sur H et $-\mathrm{id}$ sur $\mathrm{Vect}(u)$.