Nom :

Interrogation 13

Exercice 1 1. On a directement les formules du cours :

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}), \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}(x^n)$$

2. Pour $\tan(x)$, on a directement dans le cours :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

On déduit que :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} 1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \mathrm{o}(x^4)$$

et par primitive :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \mathrm{o}(x^5)$$

3. On calcule directement par produit :

$$\cos(2x)\sin(x) \underset{x\to 0}{=} (1 - 2x^2 + \mathrm{o}(x^3))(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)) = x - \frac{13}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^4).$$

Exercice 2 1. La famille $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est :
- libre si, et seulement si, f est injective ;
- génératrice si, et seulement si, f est surjective ;
- une base si, et seulement si, f est bijective.

2. (a) Si $P \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $P(X+1) \in \mathbb{R}_3[X]$ (par composition), et donc par somme $f(P) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Reste à montrer la linéarité : soient $P, Q \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (\lambda P + \mu Q)(X+1) + (\lambda P + \mu Q)(X) \\ &= \lambda(P(X+1) + P(X)) + \mu(Q(X+1) + Q(X)) = \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

donc f est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) On considère la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$. On a :

$$f(1) = 2,\ f(X) = 2X+1,\ f(X^2) = 2X^2+2X+1,\ \text{et}\ f(X^3) = 2X^3+3X^2+3X+1$$

donc l'image de la base canonique par f est une famille échelonnée : c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

Par la première question, f est donc bijective : c'est un automorphisme.

Exercice 3

1. Par définition de φ et parité de cos :

$$\varphi(\cos) = (x \mapsto \cos(x) - \cos(-x)) = (x \mapsto 0) = 0$$

De même pour id, on a :

$$\varphi(\mathrm{id}) = (x \mapsto \mathrm{id}(x) - \mathrm{id}(-x)) = (x \mapsto 2x) = 2\mathrm{id}.$$

2. Par composition et combinaison linéaire, on a déjà que, si $f \in E$, alors $\varphi(f) \in E$.
Reste à montrer la linéarité : soient $f, g \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\lambda f + \mu g)(x) & = & (\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(-x) = \lambda f(x) + \mu g(x) - \lambda f(-x) - \mu g(-x) \\ & = & \lambda(f(x) - f(-x)) + \mu(g(x) - g(-x)) = \lambda\varphi(f)(x) + \mu\varphi(g)(x) \\ & = & (\lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g))(x) \end{array}$$

et donc $\varphi(\lambda f + \mu g) = \lambda\varphi(f) + \mu\varphi(g)$: l'application φ est donc linéaire de E dans lui-même, donc c'est bien un endomorphisme de E.

3. Soit $f \in E$. Alors :

$$f \in \mathrm{Ker}\varphi \Leftrightarrow (x \mapsto f(x) - f(-x)) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$$

et donc $\mathrm{Ker}\varphi$ est l'ensemble des fonctions paires : comme $\mathrm{Ker}f \neq 0$, on déduit déjà que φ n'est pas injective.
Par double inclusion, on montre que $\mathrm{Im}\varphi$ est l'ensemble des fonctions impaires :
— si $f \in \mathrm{Im}\varphi$: notons $g \in E$ telle que $f = \varphi(g) = (x \mapsto g(x) - g(-x))$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(-x) = g(-x) - g(x) = -f(x)$. Donc f est impaire.
— si f est impaire : $\varphi(f) = (x \mapsto f(x) - f(-x)) = (x \mapsto 2f(x)) = 2f$. Et par linéarité $f = \varphi\left(\frac{1}{2}f\right) \in \mathrm{Im}\varphi$.
Ce qui prouve bien le résultat par double inclusion. Et donc $\mathrm{Im}\varphi \neq E$, donc φ n'est pas surjective.
N'étant ni injective ni surjective, elle n'est pas bijective.

Exercice 4 On a déjà :

$$\sin(x)^{\sin(x)} = \exp\left(\sin(x)\ln\left(\sin(x)\right)\right).$$

Par composition, on a :

$$\ln(\sin(x)) \underset{x\to 0}{=} \ln\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(x) + \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} \ln(x) - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^3)$$

Par produit :

$$\sin(x)\ln\left(\sin(x)\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^3)\right)\left(\ln(x) - \frac{x^2}{6} + \mathrm{o}(x^2)\right) \underset{x\to 0}{=} x\ln(x) - \frac{x^3}{6}\ln(x) + \mathrm{o}(x^3\ln(x))$$

où tous les autres termes sont en x^3, x^5 ou $\mathrm{o}(x^4)$, qui sont des $\mathrm{o}(x^3\ln(x))$.

En réinjectant, il vient :

$$x^x - \sin(x)^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} \exp(x\ln(x))\left(1 - \exp(\frac{x^3}{6}\ln(x) + \mathrm{o}(x^3\ln(x))\right).$$

Les deux termes dans les exponentielles tendent vers 0 (par croissances comparées). Le premier est donc équivalent à 1. Et le second permet d'utiliser l'équivalent : $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, ce qui donne finalement :

$$x^x - \sin(x)^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^3\ln(x)}{6}.$$