Nom :

Interrogation 13

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner (sous forme de somme) les développements limités en 0 de $\sin(x)$ à l'ordre $2n+1$, $\mathrm{ch}(x)$ à l'ordre $2n$ et de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre n.
2. Donner le développement limité de $\tan(x)$ en 0 à l'ordre 5.
3. Donner le développement limité à l'ordre 4 de $\cos(2x)\sin(x)$ en 0.

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de E.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la famille $(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ pour que l'application f soit injective/surjective/bijective.
2. On considère f définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = P(X+1) + P(X)$
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Donner une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et l'utiliser pour montrer que f est un automorphisme.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & (x \mapsto f(x) - f(-x)) \end{array} \right.$$

1. Calculer $\varphi(\cos)$ et $\varphi(\mathrm{id})$.
2. Montrer que φ est un endomorphisme de E.
3. Calculer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(\varphi)$. L'application φ est-elle injective, surjective ou bijective ?

Exercice 4 Donner un équivalent en 0 de $x^x - \sin(x)^{\sin(x)}$.

Indication : on pourra utiliser le développement limité de $\sin(x)$ en 0 à l'ordre 3.