Nom :

Interrogation 12

Exercice 1 Soit f de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $a \in I$, alors f admet le développement limité à l'ordre n en a suivant :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

Exercice 2

1. On a directement les formules du cours :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}(x^n) \\
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}(x^{2n}) \\
\mathrm{sh}(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}(x^{2n+1}) \\
\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \mathrm{o}(x^n)
\end{aligned}$$

2. Pour $\tan(x)$, on a directement dans le cours :

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}(x^3)$$

   Pour $\sqrt{1+x}$, on utilise la formule de $(1+x)^\alpha$ avec $\alpha = 1/2$, ce qui donne :

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \mathrm{o}(x^2).$$

3. Par produit de développements limités (ordre 3 pour cos et ordre 4 pour sin suffisent ici) :

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \mathrm{o}(x^4)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} x - \frac{2}{3}x^3 + \mathrm{o}(x^4)
\end{aligned}$$

Exercice 3 1. Le polynôme P_n est déjà donné en produit d'irréductibles : $P_n = X^n$.
Pour Q, on reconnaît une identité remarquable : $Q = (X-2)^2$.

2. On a directement :
$$R(X) = \sum_{k=0}^{m} \frac{R^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k.$$

3. On pose R_n ce reste. Alors, comme 2 est racine double de Q :
$$R_n(2) = P_n(2) = 2^n \text{ et } R_n'(2) = P_n'(2) = n2^{n-1}$$
et par formule de Taylor, comme $R_n \in \mathbb{R}_1[X]$:
$$R_n = R_n(2) + R_n'(2) \cdot (X-2) = 2^n + n2^{n-1}(X-2) = n2^{n-1}X + (-n+1)2^n$$

Exercice 4 1. On pose $h = x+3$:
$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \ln(4+h) = \ln(4(1+h/4)) = \ln(4) + \ln(1+h/4) = 2\ln(2) + \ln(1+h/4) \\ &\underset{h\to 0}{=} 2\ln(2) + (h/4) - \frac{(h/4)^2}{2} + \frac{(h/4)^3}{3} + \mathrm{o}(h^3) \\ &\underset{h\to 0}{=} 2\ln(2) + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + \frac{h^3}{192} + \mathrm{o}(h^3) \end{aligned}$$
d'où le développement limité en 3 :
$$\ln(1+x) \underset{x\to 3}{=} 2\ln(2) + \frac{(x-3)}{4} - \frac{(x-3)^2}{32} + \frac{(x-3)^3}{192} + \mathrm{o}((x-3)^3).$$

2. On a directement :
$$\begin{aligned} \sqrt{4+\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} \sqrt{4\left(1+\frac{\sin(x)}{4}\right)} = 2\sqrt{1+\frac{\sin(x)}{4}} \\ &\underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{\sin(x)}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{\sin(x)}{4}\right)^2 + \mathrm{o}\left(\left(\frac{\sin(x)}{4}\right)^2\right) \end{aligned}$$
Dont on regarde séparément les termes, qu'on va calculer à l'ordre 2 :
— par troncature de son dl3 en 0 :
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}(x^2)$$
— par équivalent, on a directement $\sin(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} x^2$ et donc :
$$\sin(x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2 + \mathrm{o}(x^2) \text{ et } \mathrm{o}\left(\left(\frac{\sin(x)}{4}\right)^2\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^2)$$
Et finalement par somme :
$$\sqrt{4+\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 2 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{64} + \mathrm{o}(x^2).$$