Nom :

Interrogation 11

Exercice 1 Énoncer le théorème de Rolle pour une fonction à valeurs réelles. Est-il valable pour une fonction à valeurs complexes ? Si oui, le dire. Si non, donner un contre-exemple.

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ qui est : continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Le théorème est faux sur $\mathbb{C}$: prenons $f : t \mapsto e^{2i\pi t}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1]$ avec $f(0) = f(1) = 1$. Elle ne possède pas de point critique car pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f'(t) = 2i\pi e^{2i\pi t} \neq 0$.

Exercice 2 Énoncer le théorème d'inégalité des accroissements finis pour une fonctions à valeurs réelles. Est-il valable pour une fonction à valeurs complexes ? Si oui, le dire. Si non, donner un contre-exemple.

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ qui est : continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et telle que : $\forall t \in]a;b[,\ |f'(t)| \leq M$ (pour $M \in \mathbb{R}_+$ fixé).

Alors : $\forall x, y \in [a,b],\ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ (et on pouvait, comme dans le cours, remplacer $[a;b]$ par un intervalle I quelconque, sur lequel f serait dérivable)

Le théorème est vrai aussi si f est à valeurs complexes.

Exercice 3

1. Donner le théorème de division euclidienne de A par B
2. Quel est le lien entre la division euclidienne de A par B et le fait que B divise ou non A ?

1. Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q,R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que :
$$A = BQ + R \text{ et } \deg(R) < \deg(B).$$
2. En notant R le reste de la division euclidienne de A par B, on a : B divise A si, et seulement si, $R = 0$.

Exercice 4

1. Donner la définition de la convexité de f sur I.
2. Étant donnée f convexe sur I, donner l'inégalité des pentes obtenues pour $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$.
3. Soit $f : I \to \mathbb{R}_+^*$ deux fois dérivable. Montrer que $\ln \circ f$ est convexe si, et seulement si : $f'' \cdot f \geq (f')^2$.

1. La fonction f est convexe sur I si :
$$\forall x, y \in I,\ \forall t \in [0; 1],\ f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$
2. Pour $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, l'inégalité des pentes est :
$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$
3. La fonction f étant $\mathcal{C}^2$, et la fonction ln étant $\mathcal{C}^\infty$, il vient par composée que $g = \ln \circ f$ est $\mathcal{C}^2$. Elle est donc convexe si, et seulement si : $g'' \geq 0$. Mais par dérivée d'une composée :
$$\forall x \in I,\ g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{ puis } g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f'(x)^2}$$
et donc g est convexe si, et seulement si : $\forall x \in I,\ f''(x)f(x) \geq f'(x)^2$, ce qui est bien la condition demandée.

Exercice 5

1. Donner la formule de Leibniz pour deux fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^n$ (en donnant un énoncé précis).
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que la fonction $x \mapsto x^2(1+x)^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer sa dérivée n-ème.

1. Soient f, g de classe $\mathcal{C}^n$. Alors le produit fg est de classe $\mathcal{C}^n$ avec :
$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$
2. La fonction considérée est une fonction polynomiale, donc $\mathcal{C}^\infty$.
On peut calculer ses dérivées par formule de Leibniz. Si on note $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto (1+x)^n$, alors on a les dérivées vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2x,\ f''(x) = 2, \text{ et } \forall k \geq 3,\ f^{(k)}(x) = 0$$

d'où par formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = x^2 g^{(n)}(x) + 2nx g^{(n-1)}(x) + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} g^{(n-2)}$$

et on calcule facilement les dérivées de g :

$$g^{(n-2)} = x \mapsto \frac{n!}{2}(1+x)^2,\ g^{(n-1)} = x \mapsto n!(1+x) \text{ et } g^{(n)} = x \mapsto n!$$

et finalement la dérivée demandée est :

$$x \mapsto n!\left(x^2 + 2nx(1+x) + \frac{n(n-1)}{2}(1+x)^2\right) = n!\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^2 + n(n+1)x + \frac{n(n-1)}{2}\right)$$