Nom :

Interrogation 10

Exercice 1 Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose : $F_a = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x + 2y + 3z = a\}$. Dire pour quelle(s) valeur(s) de a l'ensemble F_a est un espace vectoriel, et en donner alors une base (en le justifiant).

— si $a \neq 0$: alors $0 \notin F_a$, donc F_a n'est pas un espace vectoriel ;
— si $a = 0$:

$$F_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x+2y+3z = a\} = \{(-2y-3z, y, z) \,|\, y, z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

qui est donc bien un espace vectoriel, en tant que l'espace engendré par $\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Cette famille en est même une base comme elle est génératrice (par définition de F_0) et clairement libre (famille de deux vecteurs qui ne sont pas colinéaires, comme ils ont des 0 à des coordonnées différentes).

Exercice 2 1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ adhérent à I et $l \in \mathbb{R}$. Donner les définitions de :
   (a) f tend vers l en a ;
   (b) f tend vers $-\infty$ en a.
2. Donner le théorème de caractérisation séquentielle de la limite.
3. Montrer que la fonction sin ne possède pas de limite en $+\infty$.

1. (a) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$;
   (b) $\forall B \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \leq B$
2. Si $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à I et $l \in \overline{\mathbb{R}}$, on a équivalence entre :
   — f tend vers l en a ;
   — pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui tend vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers l.
3. On utilise la contraposée dans la caractérisation séquentielle : considérons $(u_n) = (\pi/2 + n\pi)$, qui tend bien vers $+\infty$. La suite $(\sin(u_n)) = ((-1)^n)$ n'a pas de limite, donc sin n'a pas de limite en $+\infty$.

Exercice 3

1. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.
2. Montrer que la fonction Arctan est lipschitzienne.

1. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est lipschitzienne si :

$$\exists k \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

2. La fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\mathrm{Arctan}'(x)| = \left|\frac{1}{1+x^2}\right| \leq 1$$

et ainsi, par inégalité des accroissements finis elle est 1-lipschitzienne.

Exercice 4 On considère f une fonction dérivable sur $[0;1]$ telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $f'(0) = 0$. On pose $\varphi : x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$

1. Montrer que φ est dérivable sur $]0;1]$.
2. Montrer que φ se prolonge en une fonction continue sur $[0;1]$.
3. En déduire que φ possède un point critique, que l'on notera c, et que la tangente à la courbe de f en c passe par l'origine.

1. En tant que quotient des fonctions dérivables f et id, le dénominateur ne s'annulant pas sur $]0;1]$, la fonction φ est bien dérivable sur $]0;1]$.
2. Pour tout $x \in]0;1]$, on a :

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0}{\to} f'(0) = 0$$

donc φ est prolongeable par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$. Comme elle est déjà continue (en tant que fonction dérivable) sur $]0;1]$, son prolongement est bien continu sur $[0;1]$.

3. Le prolongement de φ vérifie bien les hypothèses du théorème de Rolle sur $[0;1]$ (mêmes valeurs en 0 et 1, continuité sur $[0;1]$ et dérivabilité sur $]0;1[$). Par théorème de Rolle, il existe $c \in]0;1[$ tel que $\varphi'(x) = 0$.
Mais, par dérivée d'un quotient, on a :

$$\forall x \in]0;1],\ \varphi'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

et ainsi $cf'(c) = f(c)$.
L'équation de la tangente à la courbe de f en c a pour équation : $y = f'(c)(x-c) + f(c)$. Son point d'abscisse 0 a pour ordonnée $f'(c)(0 - c) + f(c) = -cf'(c) + f(c) = 0$: cette tangente passe bien par l'origine.