

Nom :

---

## Interrogation 10

**Exercice 1** Pour  $a \in \mathbb{R}$ , on pose :  $F_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = a\}$ . Dire pour quelle(s) valeur(s) de  $a$  l'ensemble  $F_a$  est un espace vectoriel, et en donner alors une base (en le justifiant).

**Exercice 2** 1. Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  adhérent à  $I$  et  $l \in \mathbb{R}$ . Donner les définitions de :

- (a)  $f$  tend vers  $l$  en  $a$  ;
- (b)  $f$  tend vers  $-\infty$  en  $a$ .

2. Donner le théorème de caractérisation séquentielle de la limite.

3. Montrer que la fonction sin ne possède pas de limite en  $+\infty$ .

- Exercice 3**
1. Donner la définition d'une fonction lipschitzienne.
  2. Montrer que la fonction Arctan est lipschitzienne.

**Exercice 4** On considère  $f$  une fonction dérivable sur  $[0; 1]$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$  et  $f'(0) = 0$ . On pose  $\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$

1. Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $]0; 1]$ .
2. Montrer que  $\varphi$  se prolonge en une fonction continue sur  $[0; 1]$ .
3. En déduire que  $\varphi$  possède un point critique, que l'on notera  $c$ , et que la tangente à la courbe de  $f$  en  $c$  passe par l'origine.