Nom :

Interrogation 8

Exercice 1 1. Soit f continue sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$. Donner l'expression (à l'aide éventuellement d'une intégrale) de l'unique primitive qui vaut y_0 en x_0.

2. Donner le plus simplement possible l'expression de l'unique primitive de ln qui vaut 1 en e.

1. Cette primitive est $x \mapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{d}t + y_0$.
2. Une primitive de ln est $x \mapsto x\ln(x) - x$. La primitive cherchée diffère d'une constante : il s'agit de $x \mapsto x\ln(x) - x + 1$.

Exercice 2

On primitive à vue. On donne une seule primitive : toutes les autres s'obtiennent en rajoutant une constante :

1. $x \mapsto 3x^4 - 5x^2 + 1$ se primitive en $x \mapsto \dfrac{3}{5}x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + x$
2. $x \mapsto \dfrac{3}{\sqrt{x+4}}$ se primitive en $x \mapsto 6\sqrt{x+4}$
3. $x \mapsto \dfrac{3x}{1+x^2}$ se primitive en $x \mapsto \dfrac{3}{2}\ln(|1+x^2|)$ (valeur absolue optionnelle)
4. $x \mapsto 3\cos(x) - 2\sin(x)$ se primitive en $x \mapsto 3\sin(x) + 2\cos(x)$
5. $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)} = \dfrac{1/x}{\ln(x)}$ se primitive en $x \mapsto \ln(|\ln(x)|)$ (valeur absolue nécessaire ici)

Exercice 3

Donner une primitive de $x \mapsto \sin(x)e^{2x}$.

On passe par les complexes : $\sin(x)e^{2x} = \mathrm{Im}(e^{(2+i)x}$. L'exponentielle se primitive en $x \mapsto \dfrac{1}{2+i}e^{(2+i)x} = \dfrac{2-i}{5}e^{2x}(\cos(x) + i\sin(x))$. Donc une primitive qui convient est sa partie imaginaire, à savoir : $x \mapsto \dfrac{e^{2x}}{5}(-\cos(x) + 2\sin(x))$.

Exercice 4 Une primitive d'une fonction paire est-elle toujours impaire ? Si oui le prouver, si non donner un contre-exemple.

C'est faux en général : la fonction nulle est impaire, mais la fonction $f : x \mapsto 1$ en est une primitive mais n'est pas impaire (car $f(0) = 1 \neq 0$).

Exercice 5

Donner l'expression de l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes qui s'annulent en 0 :

1. $t \mapsto t^2\cos(t)$
2. $t \mapsto 2t\mathrm{Arctan}(t)$

On procède par ipp dans les deux cas :

1. avec deux intégrations par parties successives, on explicite la primitive demandée, qui est :
$$x \mapsto \int_0^x t^2\cos(t)\mathrm{d}t = \left[t^2\sin(t)\right]_0^x - \int 2t\sin(t)\mathrm{d}t$$
$$= x^2\sin(x) + [2t\cos(t)]_0^x - \int 2\cos(t)\mathrm{d}t = x^2\sin(x) + 2x\cos(x) - 2\sin(x)$$
2. avec une intégration par parties, on explicite la primitive demandée qui est :
$$\int_0^x 2t\mathrm{Arctan}(t)\mathrm{d}t = \left[t^2\mathrm{Arctan}(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t = x^2\mathrm{Arctan}(x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= x^2\mathrm{Arctan}(x) - x + \mathrm{Arctan}(x)$$

Exercice 6 On souhaite donner une primitive de $x \mapsto \cos^3(t)$.

1. Le faire en utilisant le changement de variable $u = \sin(t)$.
2. Le faire sans changement de variable.

On fait ici avec des primitives génériques (mais on pourrait faire en intégrant à partir de 0, ce qui donnerait l'unique primitive s'annulant en 0) :

1. (Brouillon : avec $u = \sin(t)$ on a $\mathrm{d}u = \cos(t)\mathrm{d}t$ donc $\cos^3(t)\mathrm{d}t = \cos^2(t)\mathrm{d}u = (1-u^2)\mathrm{d}u$)
$$\int^x \cos^3(t)\mathrm{d}t = \int^{\sin(x)} (1-u^2)\mathrm{d}u = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}.$$
2. On linéarise : avec Euler :
$$\cos^3(t) = \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{\cos(3t)}{4} + \frac{3\cos(t)}{4}$$
qui se primitive directement en :
$$x \mapsto \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{3}{4}\sin(x).$$