Interrogation 6

Exercice 1 On considère $\alpha > 0$.

1. Donner le domaine de définition, la dérivée et dresser le tableau de variations de la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.
2. La fonction f_α est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Son prolongement éventuel est-il dérivable en 0 (on pourra discuter suivant la valeur de α).
3. La fonction f_α est-elle bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même ? Si oui, donner sa bijection réciproque.

1. On a directement d'après le cours que $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1} > 0$ (comme $\alpha > 0$), donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. D'où le tableau :

x	0		1		$+\infty$
f_α $\alpha > 0$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comme $\lim\limits_{x \to 0^+} f_\alpha(x) = 0$ (variations précédentes comme $\alpha > 0$), alors f_α est prolongeable par continuité en 0 avec $f_\alpha(0) = 0$. Ce prolongement est :
— dérivable de nombre dérivé nul en 0 si $\alpha > 1$;
— dérivable de nombre dérivé égal à 1 en 0 si $\alpha = 1$;
— non dérivable avec une demi-tangente verticale en 0 si $\alpha < 1$.
3. La fonction f_α est bien bijective de R_+^* dans lui-même : sa bijection réciproque est $f_{1/\alpha} : x \mapsto x^{1/\alpha}$. Et les prolongement par continuité en 0 donnent même des bijections réciproques l'une de l'autre de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2 On considère $a \in]0; 1[$.

1. Donner le domaine de définition, la dérivée et dresser le tableau de variations de la fonction $\exp_a : x \mapsto a^x$.
2. La fonction $\exp_a$ est-elle bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$? Si oui, donner sa bijection réciproque.

1. On a directement d'après le cours que $\exp_a : x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, d dérivée $x \mapsto \ln(a) a^x < 0$ (comme $a \in]0; 1[$), donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp_a$, $a < 1$	$+\infty$ $\searrow$	1 $\searrow$	0

2. La fonction $\exp_a$ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Sa bijection réciproque est $\log_a : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

Exercice 3

1. Complétez les formules suivantes (avec toutes les formules s'il y en a plusieurs) :
   (a) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
   (b) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
   (c) $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$
   (d) $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$
2. Compléter les formules suivantes :
   (a) $\cos(\pi/6) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
   (b) $\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$
   (c) $\dfrac{1}{2} = \sin\left(\dfrac{37\pi}{6}\right)$
   (d) $1 = \tan\left(\dfrac{37\pi}{4}\right)$

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^2+1}$:

$$\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^2+1} = \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}^2}\frac{\sqrt{x}^2}{x^2+1} = \underbrace{\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}^2}}_{\to 0 \text{ par cc}} \underbrace{\frac{1}{x+1/x}}_{\to 0 \text{ par quotient}} \underset{x \to +\infty}{\to} 0 \text{ par produit.}$$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - x^2}{x^5 - 37}$:

$$\frac{e^x - x^2}{x^5 - 37} = \underbrace{\frac{e^x}{x^5}}_{\to +\infty \text{ par cc}} \underbrace{\frac{1 - x^2/e^x}{1 - 37/x^5}}_{\to 1 \text{ par cc et quotient}} \underset{x \to +\infty}{\to} +\infty \text{ par produit}$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x-1}$:

$$\frac{\ln(1+x)}{e^x-1} = \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{x}{e^x-1} \underset{x\to 0}{\to} 1 \text{ par limites classiques et produit}$$

Exercice 5 Donner $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 3\cos(t) + \sqrt{3}\sin(t) = A\cos(t-\varphi).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$3\cos(t)+\sqrt{3}\sin(t) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos(\pi/6)\cos(t) + \sin(\pi/6)\sin(t)\right) = 2\sqrt{3}\cos(t-\pi/6$$

donc $A = 2\sqrt{3}$ et $\varphi = \pi/6)$ conviennent.