Interrogation 5 : corrigé

Exercice 1 On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de "f est minorée" et sa négation.
2. Donner la définition de "f est strictement croissante" et sa négation.

1. f minorée : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq m$
   Négation : $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.
2. f strictement croissante : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
   Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ et $f(x) \geq f(y)$.

Exercice 2 Soit $\alpha < 0$. On pose $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

1. Donner l'ensemble de définition, la dérivée et le tableau de variations de f_α en donnant bien les limites au bornes de l'ensemble de définition.
2. Justifier que f_α réalise une bijection d'un ensemble I vers un ensemble J, qu'on précisera en les choisissant les plus grands possibles, et donner sa bijection réciproque.

1. f_α est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (par composée) de dérivée : $f'_\alpha : x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$. On a le tableau de variation :

x	0	1	$+\infty$
f_α	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0

   où les limites sont données par calcul direct (pas de forme indéterminée)
2. Par théorème de la bijection monotone, f_α étant continue et strictement croissante, on déduit des limites précédentes que f_α réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Sa bijection réciproque est $f_{1/\alpha} : x \mapsto x^{1/\alpha}$.

Exercice 3

1. Donner la formule du binôme :

$$\forall a, b \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2. Donner la formule de Pascal :

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^4+1)}{x^2+3}$:

$$\frac{\ln(x^4+1)}{x^2+3} = \frac{\ln(x^4+1)}{x^4+1} \times \frac{x^4+1}{x^2+3} = \underbrace{\frac{\ln(x^4+1)}{(x^4+1)^{1/2}}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{(1+\frac{1}{x^4})^{1/2}}{1+\frac{3}{x^2}}}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^3+1}$:

$$\frac{e^{3x}}{x^3+1} = \underbrace{\frac{e^{3x}}{(3x)^3}}_{\to+\infty} \times \underbrace{\frac{(3x)^3}{x^3+1}}_{\to 27} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x}$:

$$\frac{x^3-3x\ln x+\ln x}{e^x+x\sin x} = \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{\to 0} \times \underbrace{\frac{1-\frac{3\ln x}{x^2}+\frac{\ln x}{x^3}}{1+\frac{x}{e^x}\sin x}}_{\to 1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 5 Résoudre le système suivant par la méthode du pivot :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 6y & + & z & = & 7 \\ x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ -2x & + & 5y & - & 2z & = & -1 \end{array} \right.$$

On résout par pivot :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ 3x & - & 6y & + & z & = & 7 \\ -2x & + & 5y & - & 2z & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 5 \\ & - & 12y & - & 2z & = & -8 \\ & + & 9y & & & = & 9 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ z & = & -6y+4=-2 \\ x & = & 5-2y-z=5 \end{array} \right.$$

Donc le système admet $(5,1,-2)$ comme unique triplet solution.