Interrogation 4 : corrigé

Exercice 1 On considère $f : I \to J$, où I, J sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

1. Donner la définition de la bijectivité de f.
2. On considère f bijective, et $x_0 \in I$ tel que avec f est dérivable en x_0.
   (a) Donner l'équation de la tangente à la courbe de f en x_0.
   (b) Dire à quelle condition f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et donner alors sa dérivée. Que dire sur f^{-1} sinon ?
3. On considère $f : x \mapsto \dfrac{x+4}{x-1}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition I de f.
   (b) Montrer que f réalise une bijection de I dans un ensemble J que l'on précisera, et donner sa bijection réciproque.

1. f est bijective si tout élément de J possède un unique antécédent dans I par f.
2. (a) L'équation de la tangente est : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.
   (b) f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ si, et seulement si, $f'(x_0) neq 0$, et alors : $\left(f^{-1}\right)'(f(x_0)) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.
   Sinon : la courbe de f^{-1} admet une tangente verticale en son point d'abscisse $f(x_0)$.
3. (a) f est définie pour $x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
   (b) Soit $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+4}{x-1} = y \overset{x \neq 1}{\Leftrightarrow} (x+4) = y(x-1) \Leftrightarrow x(1-y) = -4 - y$$

   — si $y = 1$: alors $f(x) = y \Leftrightarrow 0 = 3$, qui n'a pas de solution, donc 1 ne possède pas d'antécédent par f ;
   — si $y \neq 1$: alors $f(x) = y \Leftrightarrow x = \dfrac{y+4}{y-1}$, et donc y possède un unique antécédent par f, qui est $\dfrac{y+4}{y-1}$.

   Ainsi f réalise une bijection de I dans $J = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ (donc $I = J$) avec :

$$f^{-1} : y \mapsto \frac{y+4}{y-1}$$

   donc $f = f^{-1}$ (c'est joli : autant le signaler).

Exercice 2 Compléter les formules suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} \right).$$

$$\sum_{1 \le i,j \le n} a_i \cdot b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \right).$$

Exercice 3 On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de “f est majorée” et sa négation.
2. Donner la définition de “f est croissante” et sa négation.

1. f majorée : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \le M$.
   Négation : $\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) > M$.
2. f croissante : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y)$
   Négation : $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x \le y$ et $f(x) > f(y)$

Exercice 4

1. Donner la factorisation de $a^n - b^n$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) = (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right).$$

2. À quelle condition peut-on factoriser $a^n + b^n$? Donner la factorisation dans ce cas.
   Pour n impair :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}) = (a+b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k \right).$$

Exercice 5 Simplifier les quantités suivantes :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n \cdot \prod_{k=1}^{n} k = 2^n \cdot n!$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k-1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$
3. $\displaystyle\sum_{1 \le i,j \le n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} j \right) = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$