Interrogation 3 : corrigé

Exercice 1 On considère $f : I \to J$, où I, J sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$:

1. Donner la définition de la bijectivité de f.
2. On considère f bijective, avec f dérivable en $x \in I$. Dire à quelle condition f^{-1} est dérivable en $f(x)$ et donner alors sa dérivée.
3. On considère $f : x \mapsto \dfrac{e^x + 2}{e^{-x}}$.
   (a) Donner l'ensemble de définition D_f de f.
   (b) Étudier les variations de f sur D_f. On pourra donner les limites de f sans les justifier.
   (c) En déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un $\mathbb{R}_+^*$.

1. La fonction f est bijective si tout élément de J possède un unique antécédent dans I par f.
2. La fonction f^{-1} est dérivable en $f(x)$ si, et seulement si, $f'(x) \neq 0$, et alors : $(f^{-1})'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$.
3. (a) La fonction f est définie en tout x tel que $e^{-x} \neq 0$, donc sur $\mathbb{R}$.
   (b) La fonction f est le quotient des deux fonctions dérivables $x \mapsto e^x+2$ et $x \mapsto e^{-x}$, dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{e^x \cdot e^{-x} - (e^x + 2) \cdot (-e^{-x})}{e^{-2x}} = \frac{1 + 1 + 2e^{-x}}{e^{-2x}} = 2e^{2x} + 2e^x > 0$$

   donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a directement : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (pas de FI).
   (c) Par théorème de la bijection monotone (f est dérivable donc continue), f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 Donner la définition que la courbe de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet une asymptote en $+\infty$, et étudier celle (éventuelle) de $x \mapsto \dfrac{x^3 - 4x^2}{x^2 - x}$ en $+\infty$.

La courbe de f admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = ax + b$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.

Ici, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3 - 4x^2}{x^3 - x^2} = \frac{1 - 4/x}{1 - 1/x} \underset{x \to +\infty}{\to} 1$$

$$f(x) - x = \frac{x^3 - 4x^2}{x^2 - x} - x = \frac{x^3 - 4x^2 - x^3 + x^2}{x^2 - x} = \frac{-3x^2}{x^2 - x} = \frac{-3}{1 - 1/x} \underset{x \to +\infty}{\to} -3$$

donc $\Delta : y = x - 3$ est asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 3 On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de "f est minorée" et sa négation.
2. Donner la définition de "f est strictement décroissante" et sa négation.
3. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(a - x) = -f(x)$: quelle propriété possède alors la courbe de f ? Que penser du cas $a = 0$?
4. On considère ici $f : x \mapsto \cos(x)$ de courbe $\mathcal{C}_f$:
   (a) Dire si f est majorée/minorée ou a un maximum/minimum (sans démonstration).
   (b) Montrer que f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2\pi$.

1. f est minorée si : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ m \leq f(x)$ négation : $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ m > f(x)$
2. f est strictement décroissante si : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$ (et c'est même une équivalence) négation : $\exists x, y \in \mathbb{R},\ x < y$ et $f(x) \leq f(y)$
3. symétrie centrale par rapport au point de coordonnées $(a/2, 0)$. Pour $a = 0$, on obtient que f est impaire, ce qui traduit une symétrie centrale par rapport à l'origine.
4. (a) f est minorée et majorée : elle admet 1 comme maximum et -1 comme minimum.
   (b) la négation de f croissante est : $\exists x, y \in \mathbb{R}, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$. Avec $x = 0$ et $y = \pi/2$ on a bien $x \leq y$ mais $f(x) = 1 > 0 = f(y)$. Donc f n'est pas croissante.
   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
   $$f(4\pi - x) = \cos(4\pi - x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$
   en utilisant successivement la 2π-périodicité puis la parité de f. Ce qui prouve bien la symétrie cherchée.
   (d) On peut par exemple étudier f sur $[\pi; 2\pi]$: la 2π-périodicité permet de réduire l'intervalle d'étude à $[\pi; 3\pi]$, et la symétrie montrée avant permet de réduire à $[\pi; 2\pi]$.