Interrogation 2 : corrigé

Exercice 1 Pour $a, b \in \mathbb{R}$, on définit le segment $[a, b]$ comme :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Un sous-ensemble non vide I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si :

$$\forall a, b \in I,\ [a, b] \subset I.$$

Exercice 2 On considère $f : D \to \mathbb{R}$.

1. Donner la définition de f croissante et de f strictement croissante.
2. On suppose f strictement croissante : montrer que f est croissante.
3. On suppose f croissante : a-t-on : $\forall x, y \in D,\ x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$?
4. On suppose f strictement croissante : a-t-on : $\forall x, y \in D,\ x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$?

1. La fonction f est croissante si : $\forall x, y \in D,\ x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(xy)$.

   Elle est strictement croissante si : $\forall x, y \in D,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
2. Si f est strictement croissante. Soient $x, y \in D$ tels que $x \leq y$. Alors :
   — si $x = y$: alors $f(x) = f(y)$ donc $f(x) \leq f(y)$;
   — sinon : alors $x < y$ donc $f(x) < f(y)$, donc $f(x) \leq f(y)$.
   Et donc $f(x) \leq f(y)$ par disjonction de cas. Donc f est croissante.
3. Non : contre-exemple avec la fonction nulle (constante de valeur 0) :
   — elle est bien croissante : pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$, on a : $f(x) = 0 \leq 0 = f(y)$;
   — l'équivalence est fausse : avec $x = 1$ et $y = 0$ on a $f(x) = 0 \leq 0 = f(y)$ mais $x > y$.
4. Oui : il suffit de prouver que : $\forall x, y \in D,\ f(x) < f(y) \Rightarrow x < y$ (comme l'autre implication est directement la définition).

   Soients $x, y \in D$. Montrons que $f(x) < f(y) \Rightarrow x < y$. Par contraposée, il suffit de montrer que $y \leq x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$. Mais, comme f est strictement croissante, elle est croissante. Donc cette dernière assertion est vérifée.

   D'où le résultat par contraposée.

Exercice 3 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Donner la définition de la partie entière de x.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 19$. Montrer que : $\lfloor \sqrt{n^2+37} \rfloor = n$.

1. La partie entière de x est l'unique entier $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Par définition, on a : $\lfloor \sqrt{n^2+37} \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq \sqrt{n^2+37} < n+1$.

   Par stricte croissante de la fonction $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ (tout est positif), on a : $n \leq \sqrt{n^2+37} < n+1 \Leftrightarrow n^2 \leq n^2+37 < (n+1)^2$.

   On montre séparément les deux inégalités :
   - $n^2 \leq n^2+37 \Leftrightarrow 0 \leq 37$, ce qui est vrai, donc l'inégalité de gauche est vérifiée ;
   - $n^2+37 < (n+1)^2 \Leftrightarrow n^2+37 < n^2+2n+1 \Leftrightarrow 37 < 2n+1 \Leftrightarrow 18 < n$, ce qui est vrai comme $n \geq 19 > 18$, donc l'inégalité de droite est vérifiée.

   D'où le résultat.

Exercice 4 1. Donner la définition, pour $x \in \mathbb{R}_+$, de la racine carrée de x.

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra procéder par contraposée).

1. La racine carrée de x est l'unique réel positif dont le carré vaut x (c'est-à-dire $\sqrt{x} \in \mathbb{R}_+$ et $(\sqrt{x})^2 = x$).
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$. Montrons que $x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$.

   On procède par contraposée. On veut donc montrer que $\sqrt{x} \geq \sqrt{y} \Rightarrow x \geq y$.

   Si $\sqrt{x} \geq \sqrt{y}$. Par définition, on a : $0 \leq \sqrt{y} \leq \sqrt{x}$ (une racine est positive).

   Comme tout est positif, on peut multiplier cette inégalité avec elle-même, ce qui donne : $0 \leq (\sqrt{y})^2 \leq (\sqrt{x})^2$, c'est-à-dire $0 \leq y \leq x$. Donc $x \geq y$.

   D'où la contraposée.

   Donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.